

## 高三年级第十次调研考试

### 数学试卷（理科）

注意事项：

- 1、本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，满分 150 分，考试时间为 120 分钟。
- 2、本试卷分试题卷和答题卷，第 I 卷（选择题）的答案应填在答题卷卷首相应的空格内，做在第 I 卷的无效。
- 3、答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号填涂在答题卡相应的位置。

#### 第 I 卷

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $A = \{x \in \mathbb{Z} | x > -1\}$ ，集合  $B = \{x | \log_2 x < 2\}$ ，则  $A \cap B =$

- A.  $\{x | -1 < x < 4\}$       B.  $\{x | 0 < x < 4\}$       C.  $\{0, 1, 2, 3\}$       D.  $\{1, 2, 3\}$

2. 设复数  $z = 1 + bi$  ( $b \in \mathbb{R}$ )，且  $z^2 = -3 + 4i$ ，则  $\bar{z}$  的虚部为

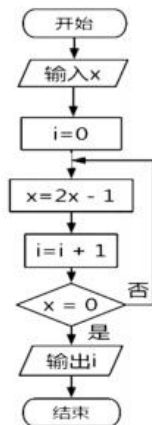
- A.  $2i$       B.  $-2i$       C.  $2$       D.  $-2$

3. 在等比数列  $\{a_n\}$  中， $a_1 = 1$ ， $\frac{a_6 + a_8}{a_3 + a_5} = \frac{1}{27}$ ，则  $a_6$  的值为

- A.  $\frac{1}{27}$       B.  $\frac{1}{81}$       C.  $\frac{1}{243}$       D.  $\frac{1}{729}$

4. 右图的框图中，若输入  $x = \frac{15}{16}$ ，则输出的  $i$  值为

- A. 3  
B. 4  
C. 5  
D. 6

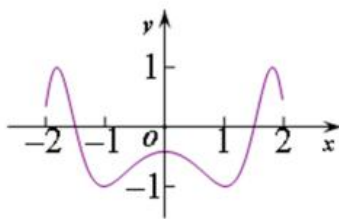


5. 已知  $a = \log_3 0.8$ ， $b = 3^{0.8}$ ， $c = 0.3^{2.1}$ ，则

- A.  $a < ab < c$       B.  $ac < b < c$   
C.  $ab < a < c$       D.  $c < ac < b$

6. 已知某函数的图像如图所示, 则其解析式可以是

- A.  $y = \sin(e^x + e^{-x})$   
 B.  $y = \sin(e^x - e^{-x})$   
 C.  $y = \cos(e^x - e^{-x})$   
 D.  $y = \cos(e^x + e^{-x})$



7. 《算数书》竹简于上世纪八十年代出土, 这是我国现存最早的有系统的数学典籍, 其中记载有求“盖”的术: 置如其周, 令相承也. 又以高乘之, 三十六成一. 该术相当于给出了由圆锥的底面周长  $L$  与高  $h$ , 计算其体积  $V$  的近似公式  $v \approx \frac{1}{36}L^2h$ . 它实际上是将圆锥体积公式中

的圆周率  $\pi$  近似取为 3. 那么近似公式  $v \approx \frac{3}{112}L^2h$  相当于将圆锥体积公式中的  $\pi$  近似取为

- A.  $\frac{22}{7}$       B.  $\frac{25}{8}$       C.  $\frac{28}{9}$       D.  $\frac{82}{27}$

8. 已知函数  $f(x)$  是定义在  $R$  上的奇函数,  $f(x+1)$  是偶函数, 且当  $x \in (0,1]$  时,

$$f(x) = 3^x - 2, \text{ 则 } f(2019) + f(2020) =$$

- A. -1      B. 0      C. 1      D. 2

9. 甲乙两运动员进行乒乓球比赛, 采用 7 局 4 胜制. 在一局比赛中, 先得 11 分的运动员为胜方, 但打到 10 平以后, 先多得 2 分者为胜方. 在 10 平后, 双方实行轮换发球法, 每人每次只发 1 个球. 若在某局比赛中, 甲发球赢球的概率为  $\frac{1}{2}$ , 甲接发球赢球的概率为  $\frac{2}{5}$ , 则在比分为 10:10 后甲先发球的情况下, 甲以 13:11 赢下此局的概率为

- A.  $\frac{2}{25}$       B.  $\frac{3}{10}$       C.  $\frac{1}{10}$       D.  $\frac{3}{25}$

10. 已知  $A(x_1, 0)$ 、 $B(x_2, 0)$  两点是函数  $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi) + 1$  ( $\omega > 0, \varphi \in (0, \pi)$ ) 与  $x$  轴的两个交点, 且满足  $|x_1 - x_2|_{\min} = \frac{\pi}{3}$ , 现将函数  $f(x)$  的图像向左平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位, 得到的新函数图像关于  $y$  轴对称, 则  $\varphi$  的可能取值为

- A.  $\frac{\pi}{6}$       B.  $\frac{\pi}{3}$       C.  $\frac{2\pi}{3}$       D.  $\frac{5\pi}{6}$

11. 已知直线  $x = 2a$  与双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的一条渐近线交于点  $P$ , 双曲线  $C$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 且  $\cos \angle PF_2F_1 = -\frac{1}{4}$ , 则双曲线  $C$  的渐近线方程为

- A.  $y = \pm\sqrt{15}x$                       B.  $y = \pm\frac{3\sqrt{15}}{11}x$
- C.  $y = \pm\frac{2\sqrt{15}}{11}x$                       D.  $y = \pm\sqrt{15}x$ 或 $y = \pm\frac{3\sqrt{15}}{11}$

12. 已知  $k \in R$ ，设函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2kx + 2k, & x \leq 1 \\ (x-k-1)e^x + e^3, & x > 1 \end{cases}$ ，若关于  $x$  的不等式  $f(x) \geq 0$  在

$x \in R$  上恒成立，则  $k$  的取值范围为

- A.  $[0, e^2]$                       B.  $[2, e^2]$                       C.  $[0, 4]$                       D.  $[0, 3]$

## 第 II 卷

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，请将正确答案填在答题卷相应位置。

13. 已知向量  $\vec{a} = (1, -1)$ ，向量  $\vec{b} = (0, 1)$ ，则  $|\vec{a} - 2\vec{b}| = \underline{\hspace{2cm}}$ .

14. 已知抛物线  $C: y = mx^2 (m \in R, m \neq 0)$  过点  $P(-1, 4)$ ，则抛物线  $C$  的准线方程为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

15. 已知数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$ ，其中数列  $\{a_n\}$  满足  $a_{n+10} = a_n (n \in N_+)$ ，前  $n$  项和为  $S_n$  满足

$S_n = -\frac{n^2 - 21n + 1}{2} (n \in N_+, n \leq 10)$ ；数列  $\{b_n\}$  满足  $b_{n+12} = b_n (n \in N_+)$ ，且  $b_1 = 1$ ，

$b_{n+1} = \frac{n}{n+1}b_n (n \in N_+, n \leq 12)$ ，则数列  $\{a_n \cdot b_n\}$  的第 2020 项的值为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

16. 如图，四棱锥  $P-ABCD$  中，底面为四边形  $ABCD$ . 其中

$\triangle ACD$  为正三角形，又  $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AB}$ .

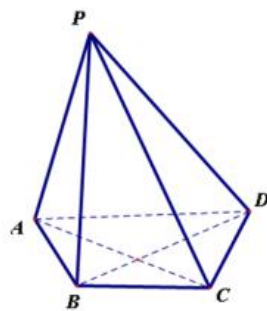
设三棱锥  $P-ABD$ ，三棱锥  $P-ACD$  的体积分别是  $V_1, V_2$ ，三

棱锥  $P-ABD$ ，三棱锥  $P-ACD$  的外接球的表面积分别是

$S_1, S_2$ . 对于以下结论：①  $V_1 < V_2$ ；②  $V_1 = V_2$ ；③  $V_1 > V_2$ ；

④  $S_1 < S_2$ ；⑤  $S_1 = S_2$ ；⑥  $S_1 > S_2$ . 其中正确命题的序号为

$\underline{\hspace{2cm}}$ .



三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

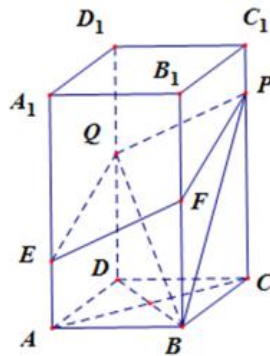
(一) 必考题：共 60 分。

17. (本小题满分 12 分) 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 若  $\cos A = \frac{2}{3}$ ,  $B = 2A$ ,  $b = 8$ .

- (1) 求边长  $a$ ;
- (2) 已知点  $M$  为边  $BC$  的中点, 求  $AM$  的长度.

18. (本小题满分 12 分) 已知, 图中直棱柱  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的底面是菱形, 其中  $AA_1 = AC = 2BD = 4$ . 又点  $E, F, P, Q$  分别在棱  $AA_1, BB_1, CC_1, DD_1$  上运动, 且满足:  $BF = DQ, CP - BF = DQ - AE = 1$ .

- (1) 求证:  $E, F, P, Q$  四点共面, 并证明  $EF \parallel$  平面  $PQB$ ;
- (2) 是否存在点  $P$  使得二面角  $B-PQ-E$  的余弦值为  $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ? 如果存在, 求出  $CP$  的长; 如果不存在, 请说明理由.



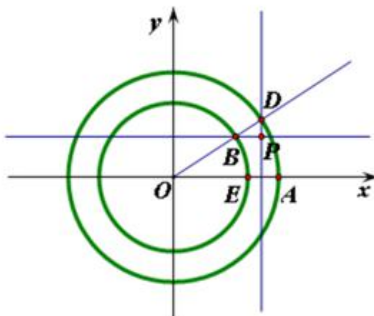
19. (本小题满分 12 分) 已知圆  $C_1: x^2 + y^2 = 2$ , 圆  $C_2: x^2 + y^2 = 4$ , 如图,  $C_1, C_2$  分别交  $x$  轴正半轴于点  $E, A$ . 射线  $OD$  分别交  $C_1, C_2$  于点  $B, D$ , 动点  $P$  满足直线  $BP$  与  $y$  轴垂直, 直线  $DP$  与  $x$  轴垂直.

(1) 求动点  $P$  的轨迹  $C$  的方程;

(2) 过点  $E$  作直线  $l$  交曲线  $C$  于点  $M, N$ , 射线  $OH \perp l$  与点  $H$ , 且交曲线  $C$  于点  $Q$ .

问:  $\frac{1}{|MN|} + \frac{1}{|OQ|^2}$  的值是否是定值? 如果是定值, 请求出该定值; 如果不是定值,

请说明理由.



20. (本小题满分 12 分) 某校高三男生体育课上做投篮游戏, 两人一组, 每轮游戏中, 每小组两人每人投篮两次, 投篮投进的次数之和不少于 3 次称为“优秀小组”. 小明与小亮同一小组, 小明、小亮投篮投进的概率分别为  $P_1, P_2$ .

(1) 若  $P_1 = \frac{2}{3}, P_2 = \frac{1}{2}$ , 则在第一轮游戏他们获“优秀小组”的概率;

(2) 若  $P_1 + P_2 = \frac{4}{3}$ , 且游戏中小明小亮小组要想获得“优秀小组”次数为 16 次, 则理论

上至少要进行多少轮游戏才行? 并求此时  $P_1, P_2$  的值.

21. (本小题满分 12 分) 已知函数  $f(x) = a \ln x - x + a$ ,  $g(x) = kx - x \ln x - b$ ,

其中  $a, b, k \in R$ .

(1) 求函数  $f(x)$  的单调区间;

(2) 若对任意  $a \in [1, e]$ , 任意  $x \in [1, e]$ , 不等式  $f(x) \geq g(x)$  恒成立时最大的  $k$  记为  $c$ ,

当  $b \in [1, e]$  时,  $b + c$  的取值范围.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在 22, 23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修 4—4: 坐标系与参数方程]

(本小题满分 10 分) 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 曲线  $C_1$  的参数方程为 
$$\begin{cases} x = 1 + \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}$$

( $\theta$  为参数), 在以坐标原点为极点,  $x$  轴正半轴为极轴的极坐标系中, 曲线  $C_2$  的极坐标方程为 
$$\rho^2 = \frac{48}{3 + \sin^2 \theta}$$

(1) 求曲线  $C_1$  和曲线  $C_2$  的一般方程;

(2) 若曲线  $C_2$  上任意一点  $P$ , 过  $P$  点作一条直线与曲线  $C_1$  相切, 与曲线  $C_1$  交于  $A$  点,

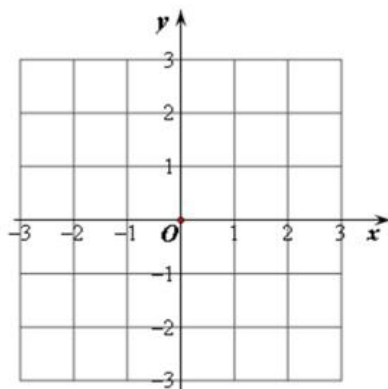
求  $|PA|$  的最大值.

23. [选修 4—5: 不等式选讲]

(本小题满分 10 分) 已知点  $P(x, y)$  的坐标满足不等式:  $|x-1| + |y-1| \leq 1$ .

(1) 请在直角坐标系中画出由点  $P$  构成的平面区域  $\Omega$ , 并求出平面区域  $\Omega$  的面积  $S$ ;

(2) 如果正数  $a, b, c$  满足  $(a+c)(b+c) = S$ , 求  $a+2b+3c$  的最小值.



自主招生在线创始于2014年，致力于提供自主招生、综合评价、三位一体、学科竞赛、新高考生涯规划等政策资讯的服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站(www.zizzs.com)和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国自主招生、综合评价领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注自主招生在线官方微信信号：zizzsw。



识别二维码，快速关注