成都市2020级高中毕业班第三次诊断性检测

数　学(理科)

本试卷分选择题和非选择题两部分。第Ⅰ卷(选择题)1至3页,第Ⅱ卷(非选择题)3至4页,共4页,满分150分,考试时间120分钟。

注意事项:

1. 答题前,务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上。
2. 答选择题时,必须使用2B铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦擦干净后,再选涂其它答案标号。
3. 答非选择题时,必须使用0.5毫米黑色签字笔,将答案书写在答题卡规定的位置上。
4. 所有题目必须在答题卡上作答,在试题卷上答题无效。
5. 考试结束后,只将答题卡交回。

第Ⅰ卷　(选择题,共60分)

一、选择题: 本大题共12小题,每小题5分,共60分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A=\{x\in\mathbf{N}\mid |x|\leqslant 2\}$,$B=\{2,4\}$,则 $A\cup B=$

(A) $\{0,2\}$　　(B) $\{-2,-1,0,1,2,4\}$

(C) $\{0,1,2,4\}$　　(D) $\{1,2,4\}$

2. 命题"$\forall x\in\mathbf{R},x^2+x-1\leqslant 0$"的否定是

(A) $\exists x_0\in\mathbf{R},x_0^2+x_0-1\leqslant 0$　　(B) $\exists x_0\in\mathbf{R},x_0^2+x_0-1>0$

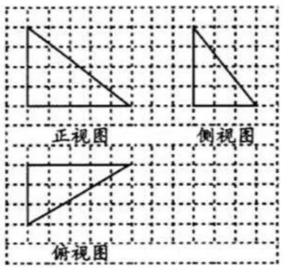
(C) $\forall x\in\mathbf{R},x^2+x-1>0$　　(D) $\exists x_0\in\mathbf{R},x_0^2+x_0-1\geqslant 0$

3. 已知双曲线 C 经过点 $(4,2)$,且与双曲线 $\frac{x^2}{2}-y^2=1$ 具有相同的渐近线,则双曲线 C 的标准方程为

(A) $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}=1$　　(B) $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1$

(C) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$　　(D) $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{12}=1$

4. 如图是某三棱锥的三视图,已知网格纸的小正方形边长是1,则这个三棱锥中最长棱的长为



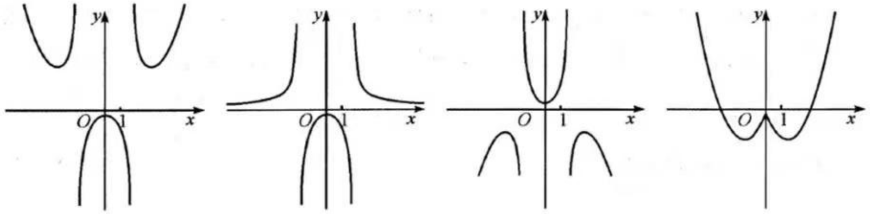
(A) 5

(B) $\sqrt{34}$

(C) $\sqrt{41}$

(D) 7

5. 函数 $f(x)=\dfrac{e^{|x|}}{x^2-3}$ 的图象大致为



(A) (B) (C) (D)

6. 一次数学考试后，某班级平均分为 110 分，方差为 s_1^2. 现发现有两名同学的成绩计算有误，甲同学成绩被误判为 113 分，实际得分为 118 分；乙同学成绩误判为 120 分，实际得分为 115 分. 更正后重新计算，得到方差为 s_2^2，则 s_1^2 与 s_2^2 的大小关系为

(A) $s_1^2=s_2^2$　　(B) $s_1^2>s_2^2$　　(C) $s_1^2<s_2^2$　　(D) 不能确定

7. 已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{b}$. 给出定义：经过 $\overrightarrow{AB}$ 的起点 A 和终点 B，分别作 $\overrightarrow{CD}$ 所在直线的垂线，垂足分别为 A_1，B_1，则称向量 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量. 已知 $\boldsymbol{a}=(1,0)$，$\boldsymbol{b}=(\sqrt{3},1)$，则 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为

(A) $(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$　　(B) $(1,\frac{\sqrt{3}}{3})$　　(C) $(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$　　(D) $(\frac{3}{4},\frac{\sqrt{3}}{4})$

8. 世界大学生运动会（简称大运会）由国际大学生体育联合会主办，每两年举办一届，是规模仅次于奥运会的世界综合性运动会，第31届大运会将于 2023 年 7 月 28 日至 8 月 8 日在成都召开. 为办好本届大运会，组委会精心招募了一批志愿者，现准备将甲、乙等 6 名志愿者安排进“东安湖体育公园”，“凤凰山体育公园”，“四川省体育馆”工作，每个地方安排两人且每人只能在一个场馆工作. 若每位志愿者被分到各个场馆的可能性相同，则甲，乙两人被安排在在同一个场馆的概率为

(A) $\frac{1}{15}$　　(B) $\frac{2}{3}$　　(C) $\frac{1}{5}$　　(D) $\frac{1}{3}$

9. 设 S_n 为正项等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $S_{2023}=2023$，则 $\dfrac{1}{a_4}+\dfrac{4}{a_{2020}}$ 的最小值为

(A) $\frac{5}{2}$　　(B) 5　　(C) 9　　(D) $\frac{9}{2}$

10. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{3})(\omega>0)$，当 $|f(x_1)-f(x_2)|=2$ 时，$|x_1-x_2|$ 的最小值为 $\frac{\pi}{2}$. 若将函数 $f(x)$ 的图象上各点的横坐标伸长为原来的 2 倍，纵坐标不变，然后再将得到的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图象，则不等式 $g(x)\geqslant\frac{1}{2}$ 的解集为

(A) $[\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{\pi}{3}+k\pi](k\in\mathbf{Z})$　　(B) $[\frac{\pi}{3}+2k\pi,\frac{2\pi}{3}+2k\pi](k\in\mathbf{Z})$

(C) $[\frac{\pi}{12}+k\pi,\frac{5\pi}{12}+k\pi](k\in\mathbf{Z})$　　(D) $[\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{5\pi}{6}+2k\pi](k\in\mathbf{Z})$

11. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，直线 $y=kx$ $(k\neq 0)$ 与椭圆 C 相交于 A，B 两点. 有下列结论：①四边形 AF_1BF_2 为平行四边形；②若 $AE\perp x$ 轴，垂足为 E，则直线 BE 的斜率为 $\frac{1}{2}k$；③若 $|OA|=c$（O 为坐标原点），则四边形 AF_1BF_2 的面积为 b^2；④若 $|AF_1|=2|AF_2|$，则椭圆的离心率可以是 $\frac{2}{3}$.

其中错误结论的个数是

(A)1　　(B) 2　　(C)3　　(D)0

12. 已知函数 $f(x)=x-\frac{1}{x}-m\ln x$ 有三个零点 x_1,x_2,x_3，其中 $m\in\mathbf{R}$，则 $mx_1x_2x_3$ 的取值范围是

(A)$(1,+\infty)$　　(B) $(2,+\infty)$　　(C)$(e,+\infty)$　　(D)$(3,+\infty)$

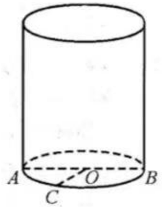
第Ⅱ卷　（非选择题，共 90 分）

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 把答案填在答题卡上.

13. 已知复数 $z=(a+i)(2+i)$ 是纯虚数（i 为虚数单位），则实数 a 的值为______.

14. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_2=3$，$a_6=27$，则 a_8 的值为______.

15. 如图，AB 为圆柱下底面圆 O 的直径，C 是下底面圆周上一点，已知 $\angle AOC=\frac{\pi}{3}$，$OA=2$，圆柱的高为 5. 若点 D 在圆柱表面上运动，且满足 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}=0$，则点 D 的轨迹所围成图形的面积为______.



16. 在平面直角坐标系 xOy 中，射线 OT 与直线 $l:x=9$，圆 $O:x^2+y^2=9$ 分别相交于 A，B 两点，若线段 OB 上存在点 $M(m,n)$（不含端点），使得对于圆 O 上任意一点 P 都满足 $\frac{|PM|}{|PA|}=\frac{|BM|}{|BA|}$，则 mn 的最大值为______.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 12 分）

某旅游公司针对旅游复苏设计了一款文创产品来提高收益. 该公司统计了今年以来这款文创产品定价 x（单位：元）与销量 y（单位：万件）的数据如下表所示：

产品定价 x（单位：元）	9	9.5	10	10.5	11
销量 y（单位：万件）	11	10	8	6	5

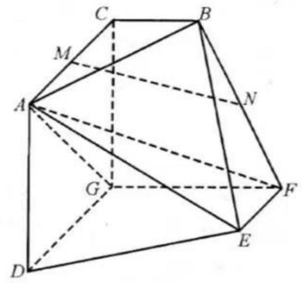
（Ⅰ）依据表中给出的数据，判断是否可用线性回归模型拟合 y 与 x 的关系，请计算相关系数并加以说明（计算结果精确到 0.01）；

（Ⅱ）建立 y 关于 x 的回归方程，预测当产品定价为 8.5 元时，销量可达到多少万件.

参考公式：$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$，$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$.

参考数据：$\sqrt{65}\approx 8.06$.

18. (本小题满分 12 分)



如图，在多面体 $ABCDEFG$ 中，已知 $ADGC$ 是正方形，$GD // EF$，$GF // BC$，$FG \perp$ 平面 $ADGC$，M，N 分别是 AC，BF 的中点，且 $BC=EF=\frac{1}{2}CG=\frac{1}{2}FG$.

(Ⅰ)求证：$MN //$ 平面 AFG；

(Ⅱ)求直线 MN 与平面 BEF 所成角的正弦值.

19. (本小题满分 12 分)

在$\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且$\sqrt{3}c+a=b\cos C-c\cos B$.

(Ⅰ)求角 B 的大小；

(Ⅱ)若 D 是 AC 边上一点，且 $BD=CD=\frac{1}{3}b$，求 $\cos\angle BDA$.

20. (本小题满分 12 分)

已知斜率为$\sqrt{3}$的直线 l 与抛物线 C：$y^2=4x$ 相交于 P，Q 两点.

(Ⅰ)求线段 PQ 中点纵坐标的值；

(Ⅱ)已知点 $T(\sqrt{3},0)$，直线 TP，TQ 分别与抛物线相交于 M，N 两点(异于 P，Q). 求证：直线 MN 恒过定点，并求出该定点的坐标.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=x^4-ax^3\sin x$，其中 $a\in\mathbf{R}$.

(Ⅰ)当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 (π,π^4) 处的切线方程；

(Ⅱ)若 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点，求 a 的取值范围.

请考生在第 22，23 题中任选择一题作答，如果多做，则按所做的第一题记分. 作答时，用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目对应的标号涂黑.

22. (本小题满分 10 分)选修 4—4：坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中，已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=1+t, \\ y=2-\frac{2t}{3} \end{cases}$ (t 为参数). 以坐标原点 O 为极点，x 轴非负半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2=\frac{4}{1+3\sin^2\theta}$.

(Ⅰ)求直线 l 的普通方程与曲线 C 的直角坐标方程；

(Ⅱ)若 P 是曲线 C 上一点，Q 是直线 l 上一点，求 $|PQ|$ 的最小值.

23. (本小题满分 10 分)选修 4—5：不等式选讲

已知函数 $f(x)=3\sqrt{x^2-4x+4}+|x-m|$，且不等式 $f(x)<3$ 的解集为 $(1,n)$.

(Ⅰ)求实数 m，n 的值；

(Ⅱ)若正实数 a，b，c 满足 $a^2+b^2+c^2=m$，证明：$\frac{a^4}{b^2+1}+\frac{b^4}{c^2+1}+\frac{c^4}{a^2+1}\geqslant\frac{1}{4}$.