柳州高中／南宁三中高三(4月)联考

文科数学参考答案

一、(60分)

1. C(因为 $U\in\mathbf{R}$,$B=\{x\mid x\geqslant 3\}$,

$\therefore \complement_U B=\{x\mid x<3\}$,

又因为 $A=\{-4,-2,0,2,4\}$,

$\therefore A\cap(\complement_U B)=\{-4,-2,0,2\}$,

故应选 C.)

2. D(因为 $z=\dfrac{2-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{(2-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\dfrac{2+2\mathrm{i}-\mathrm{i}+1}{2}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{\mathrm{i}}{2}$,

所以 $|z|=\sqrt{(\dfrac{3}{2})^2+(\dfrac{1}{2})^2}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

故应选 D.)

3. B(由题意知 $\tan\alpha=2$,$\cos 2\alpha+\cos^2\alpha=\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}+\dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}+\dfrac{1}{1+\tan^2\alpha}=\dfrac{-3}{5}+\dfrac{1}{5}=-\dfrac{2}{5}$,

故应选 B.)

4. C(由三视图知,该多面体为三棱台,体积为 $\dfrac{1}{3}\times 2\times(1+2+4)=\dfrac{14}{3}$.

故应选 C.)

5. C(各组合人数比为 $600:400:250=12:8:5$

用分层抽样的方法分别抽取物化生组合的学生:$25\times\dfrac{12}{12+8+5}=12$ 人,

物化地组合学生:$25\times\dfrac{8}{12+8+5}=8$ 人,政史地组合学生:$25\times\dfrac{5}{12+8+5}=5$ 人,

政史地组合学生小刘被选中的概率为 $\dfrac{25}{600+400+250}=\dfrac{1}{50}$,

在 C 中,每个人被选中的概率均为 $\dfrac{25}{600+400+250}=\dfrac{1}{50}$,故 C 错误.

故应选 C.)

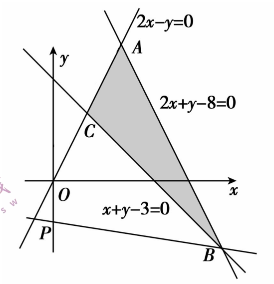
6. D($\because a>0,b>0$,

$\dfrac{a+b}{ab}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b})(a+b)=\dfrac{1}{2}(2+\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b})\geqslant\dfrac{1}{2}\times(2+2)=2$,

当且仅当 $a=b=1$ 时等号成立,

故应选 D.)

7. B(作出可行域,如图 $\triangle ABC$ 内部(含边界),



由 $\begin{cases}2x+y-8=0\\x+y-3=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=5\\y=-2\end{cases}$,即 $B(5,-2)$,

直线 $kx-y+1=0$ 过定点 $P(0,-1)$,k 表示可行域内点 (x,y) 与定点 P 连线的斜率,由图可知其最小值为 $k_{PB}=\dfrac{-2+1}{5-0}=-\dfrac{1}{5}$.

故应选 B.)

8. A(由抛物线的定义,点 P 到准线 l 的距离 d_1 等于点 P 到焦点的距离 $|PF|$,

过焦点 $F(1,0)$ 向直线 $3x+4y+17=0$ 作垂线,垂足为 N,交抛物线于点 P,则此时 d_1+d_2 最小,

这时,$d_1+d_2\geqslant|FN|=\dfrac{3+17}{3^2+4^2}=4$,

故应选 A.)

9. B(由 $\dfrac{4}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$ 得 $a=$

$\frac{8}{\sqrt{3}}\sin A, c=\frac{8}{\sqrt{3}}\sin C$,

故 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{64}{3}\sin A\sin C$

$=\frac{16\sqrt{3}}{3}\sin A\sin(120^\circ-A)$

$=\frac{16\sqrt{3}}{3}\sin A(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\frac{1}{2}\sin A)$

$=\frac{16\sqrt{3}}{3}[\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2A+\frac{1}{4}(1-\cos 2A)]$

$=\frac{16\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{2}[\frac{1}{2}-\cos(2A+60^\circ)]$

$=\frac{8\sqrt{3}}{3}[\cos(2A-120^\circ)+\frac{1}{2}]$

由于 $A\in(0^\circ,120^\circ)$，$2A-120^\circ\in(-120^\circ,120^\circ)$，$\cos(2A-120^\circ)\in(-\frac{1}{2},1]$，

所以 $\triangle ABC$ 面积有最大值为$4\sqrt{3}$.

故应选 B.）

10. D(从装有 2 本数学和 2 本政治的口袋内任取 2 本书，可能的结果有：“两本政治”，“两本数学”“一本数学一本政治”.“至少有一本政治”包含事件：“两本政治”，“一本数学一本政治”，

A 中，事件“至少有一本政治”与事件“都是数学”是对立事件，不符合要求；

B 中，事件“至少有一本政治”包含事件“都是政治”，两本事件是包含关系，不是互斥事件，不符合要求；

C 中，事件“至少有一本数学”包含事件：“两本数学”，“一本数学一本政治”，两本事件都包含事件“一本数学一本政治”，不是互斥事件；

D 中，“恰有 1 本政治”表示事件“一本数学一本政治”，与事件“恰有 2 本政治”是互斥事件，但是不对立.

故应选 D.）

11. B(因为 $BC=1$，$CP=2$，所以 $BP=\sqrt{5}$，又因为 $AB=3$，$AP=\sqrt{14}$，所以可知 $AB\perp BP$，$BC\cap BP=B$，故 $AB\perp$ 平面 BCP，所以 $AB\perp CP$ 且 $CP\perp$ 平面 ABC，可知此三棱锥为长方体的一部分，其外接球的直径为 $\sqrt{14}$，故体积为 $\frac{7\sqrt{14}}{3}\pi$，

故应选 B.）

12. B($e^x-e^{-x}+x-\frac{1}{2x}=\ln 2x$，即 $e^x-e^{-x}-x=\ln 2x-2x+\frac{1}{2x}=e^{-\ln(2x)}-e^{\ln(2x)}+\ln 2x$

令 $h(x)=e^x-e^{-x}-x(x>0)$，$h'(x)=e^x+e^{-x}-1\geqslant 2-1=1>0(x>0)$，$h'(x)$ 在$(0,+\infty)$上为单调递增函数，故 $-x_0=\ln 2x_0$，$e^{x_0}=\frac{1}{2x_0}$，所以 $e^{x_0}\ln 2x_0=-\frac{1}{2}$.

故应选 B.）

二、(20 分)

13. 4(因为向量 $\boldsymbol{a}=(x,-2)$，$\boldsymbol{b}=(2,-1)$，所以 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(x+4,-4)$；

若 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，则$(x+4)\times(-1)-2\times(-4)=0$，解得 $x=4$.）

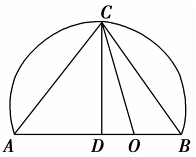
14. $[\frac{\sqrt{22}}{4},\sqrt{2})$(由题意，$e^2=\frac{a^2+b^2}{a^2}=\frac{m^2+(m-1)(m-2)}{m^2}=2(\frac{1}{m}-\frac{3}{4})^2+\frac{7}{8}$，因 $0<\frac{1}{m}\leqslant\frac{1}{4}$，

故$\frac{22}{16}<e^2<2$，所以$\frac{\sqrt{22}}{4}\leqslant e<\sqrt{2}$.）

15. $\frac{7}{6}<a<\frac{8}{3}$(由题意知，$f'(x)=\frac{1}{3}x^2+2x-2a$ 在$(1,2)$上有变号零点，又易知 $f'(x)=\frac{1}{3}x^2+2x-2a$ 在$(1,2)$上单调递增，故 $f'(x)\in(\frac{7}{3}-2a,\frac{16}{3}-2a)$，

可得$\begin{cases}\frac{7}{3}-2a<0\\ \frac{16}{3}-2a>0\end{cases}$，解得$\frac{7}{6}<a<\frac{8}{3}$.）

16. $\frac{(\pi-2\alpha)m^2}{8\cos^2\alpha}$(过 C 作 $CD\perp AB$，设圆弧 AC 的圆心为 O，半径为 R，则 $AO=CO=R$，



在 $\triangle ABC$ 中，$\angle CAD=\alpha$，所以 $AD=m\cos\alpha$，$CD=m\sin\alpha$，

所以在直角三角形 CDO 中，$CD^2+DO^2=CO^2$，所以$(m\sin\alpha)^2+(R-m\cos\alpha)^2=R^2$，所以 $R=\dfrac{m}{2\cos\alpha}$，而 $\angle COD=\pi-2\alpha$，

所以扇形的面积为 $S=\dfrac{1}{2}(\pi-2\alpha)R^2=\dfrac{(\pi-2\alpha)m^2}{8\cos^2\alpha}$.)

三、(70 分)

17. (1) 证明：由 $\dfrac{2S_n}{n}=a_n+2$，得 $2S_n=na_n+2n$①，

所以 $2S_{n+1}=(n+1)a_{n+1}+2(n+1)$②，
…………………………………………… 2 分

两式 ②－① 得 $2a_{n+1}=(n+1)a_{n+1}-na_n+2$，所以$(n-1)a_{n+1}-na_n+2=0$③，

当 $n\geqslant 2$ 时，$(n-2)a_n-(n-1)a_{n-1}+2=0$④，…………………………………… 4 分

③－④ 得$(n-1)a_{n+1}-2(n-1)a_n+(n-1)a_{n-1}=0$，

即 $a_{n+1}+a_{n-1}=2a_n$，所以$\{a_n\}$是等差数列.
…………………………………………………… 6 分

(2) 在 $\dfrac{2S_n}{n}=a_n+2$ 中，令 $n=1$ 得 $\dfrac{2a_1}{1}=a_1+2$ 所以 $a_1=2$，因为 $a_2=5$，所以$\{a_n\}$的公差 $d=a_2-a_1=3$，则 $a_n=a_1+(n-1)d=2+(n-1)\times 3=3n-1$ ………………………… 8 分

$c_n=(3n-1)\cdot 2^{n-1}$，.

所以 $T_n=2+5\times 2^1+8\times 2^2+\cdots+(3n-1)\times 2^{n-1}$，

$2T_n=2\times 2^1+5\times 2^2+8\times 2^3+\cdots+(3n-1)\times 2^n$，

两式相减得：$-T_n=2+3(2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1})-(3n-1)\times 2^n$

$=2+3\times\dfrac{2}{2-1}(2^{n-1}-1)-(3n-1)\times 2^n$

$=-4+(4-3n)\times 2^n$，

所以 $T_n=4+(3n-4)\times 2^n$. …… 12 分

18. (1) 由已知可得：$\overline{x}=\dfrac{1+2+3+4+5}{5}=3$，………………………………………… 1 分

$\overline{y}=\dfrac{640+540+420+300+200}{5}=\dfrac{2100}{5}=420$，……………………………………… 2 分

又因为 $\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i=5180$，$\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=55$，

所以 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i-5\overline{x}\,\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2-5\overline{x}^2}=\dfrac{5180-6300}{55-5\times 3^2}=-\dfrac{1120}{10}=-112$，………………………………………… 5 分

所以 $\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=420+112\times 3=756$，
………………………………………………… 6 分

所以 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}=-112x+756$， … 7 分

当 $y=-112x+756<100(x\in\mathbf{N}^*)$ 时，解得：$x\geqslant 6$，

可以预测从第 6 月份开始该大学体重超重的人数降至 100 人以下. ……………………… 8 分

(2) 从这 5 个月中随机抽取 2 个月的基本事件有(1,2)，(1,3)，(1,4)，(1,5)，(2,3)，(2,4)，(2,5)，(3,4)，(3,5)，(4,5)，共 10 个基本事件.
………………………………………………… 10 分

抽取的这两个月中体重超重的人数都少于 500 人的基本事件有(3,4)，(3,5)，(4,5)共 3 个，
…………………………………………………… 11 分

所以抽取的这两个月中体重超重的人数都少于 500 人的概率为$\dfrac{3}{10}$. ……………… 12 分

19. (1) 设 O 为 PC 中点，连接 OF，OE，

$\because PE:EC = DO:OC, DO:OC = DF:FB$,

………………………………………… 2 分

$\therefore OF \parallel BC \parallel AD$，$\therefore OE \parallel PD$，

$OE \cap OF = O, AD \cap PD = D$，

$\therefore$ 面 $EOF \parallel$ 面 PAD. ……………… 5 分

$\therefore EF \parallel$ 平面 PAD. ………………… 6 分

(2) $\because 2\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{BG}$，$\therefore GC = \frac{1}{3}BC = \frac{2}{3}$，…

………………………………………… 7 分

由等体积法，三棱锥 $G-DEF$ 的体积 V_{G-DEF}

$= \frac{2}{3}V_{C-DEF} = \frac{1}{3}V_{P-DCF} = \frac{1}{3}V_{F-PDC} = \frac{1}{6}V_{B-PDC}$

$= \frac{1}{12}V_{P-ABCD} = \frac{1}{12} \times \frac{1}{3} \times 1 \times 2 \times 2 = \frac{1}{9}$. …

………………………………………… 12 分

20. (1) $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{a}{e}, x > 0$，…… 1 分

① 当 $a \leqslant 0$ 时，$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{a}{e} > 0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增，无极值；

………………………………………… 3 分

② 当 $a > 0$ 时，$f'(x) = \frac{e - ax}{ex}$

当 $0 < x < \frac{e}{a}$ 时，$f'(x) > 0$；当 $x > \frac{e}{a}$ 时，$f'(x) < 0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{e}{a})$ 单调递增，在 $(\frac{e}{a}, +\infty)$ 单调递减.

此时函数 $f(x)_{\max} = f(\frac{e}{a}) = \ln\frac{e}{a} - 1 \geqslant 1$，

解得 $0 < a \leqslant \frac{1}{e}$，…………………………… 5 分

所以 a 的取值范围为 $(0, \frac{1}{e}]$. ……… 6 分

(2) 因为 $x > 0$，所以只需证明 $f(x) < \frac{e^{x-\frac{1}{2}}}{x + \frac{1}{2}} - 2$ 即可，

当 $a = e$ 时，由(1)知 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递增，在 $(1, +\infty)$ 单调递减，

所以 $f(x)_{\max} = f(1) = -1$，………… 8 分

记 $g(x) = \frac{e^{x-\frac{1}{2}}}{x + \frac{1}{2}} - 2 (x > 0)$，

则 $g'(x) = \frac{e^{x-\frac{1}{2}}(x - \frac{1}{2})}{(x + \frac{1}{2})^2}$，

所以当 $0 < x < \frac{1}{2}$ 时，$g'(x) < 0$，$g(x)$ 单调递减；当 $x > \frac{1}{2}$ 时，$g'(x) > 0$，$g(x)$ 单调递增.

所以 $g(x)_{\min} = g(\frac{1}{2}) = -1$，……… 11 分

因为 $f(x)_{\max}$ 与 $g(x)_{\min}$ 不能同时取到，

所以结论成立. ……………………… 12 分

21. (1) 当 $CD \perp x$ 轴时，设 $C(c, y_c)$，则 $\frac{c^2}{a^2} + \frac{y_C^2}{b^2} = 1$，$\therefore y_C = \pm\frac{b^2}{a}$，$|CD| = \frac{2b^2}{a}$，…… 2 分

由于 $|CD| = 1$，

$\therefore \frac{2b^2}{a} = 1$，又因为椭圆经过点 $(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$，所以 $\frac{1}{a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1$，

解得 $\begin{cases} a = 2, \\ b = 1 \end{cases}$ ………………………… 4 分

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$；………

………………………………………… 5 分

(2) 易知直线 AP 与 AQ 的斜率同号，所以直线 PQ 不垂直于 x 轴，

故可设 $PQ: y = kx + m$，$P(x_1, y_1)$，$Q(x_2, y_2)$，

由 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \\ y = kx + m \end{cases}$ 可得，$(1 + 4k^2)x^2 + 8mkx + 4m^2 - 4 = 0$，

所以 $x_1 + x_2 = \frac{-8mk}{1 + 4k^2}$，$x_1x_2 = \frac{4m^2 - 4}{1 + 4k^2}$，

$\Delta = 16(4k^2 + 1 - m^2) > 0$，即 $4k^2 + 1 > m^2$，

………………………………………… 7 分

而 $k_{AP}k_{AQ} = \frac{1}{20}$，即 $\frac{y_1}{x_1 - 2} \cdot \frac{y_2}{x_2 - 2} = \frac{1}{20}$，

………………………………………… 8 分

化简可得 $20(kx_1+m)(kx_2+m)=(x_1-2)(x_2-2)$，

$20k^2x_1x_2+20km(x_1+x_2)+20m^2=x_1x_2-2(x_1+x_2)+4$，

$20k^2\cdot\frac{4m^2-4}{1+4k^2}+20km\cdot\frac{-8mk}{1+4k^2}+20m^2=\frac{4m^2-4}{1+4k^2}-2\times\frac{-8mk}{1+4k^2}+4$，

化简得 $6k^2+mk-m^2=0$，所以 $m=-2k$ 或 $m=3k$，………………………………… 11 分

所以直线 PQ：$y=k(x-2)$ 或 $y=k(x+3)$，因为直线 PQ 不经过点 A，

所以直线 PQ 经过定点 $(-3,0)$. …… 12 分

22. (1) ∴ 曲线 C_1 的普通方程为 C_1：$x^2+\frac{y^2}{3}=1$，

所以曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos\alpha,\\ y=\sqrt{3}\sin\alpha,\end{cases}$ (α 为参数)，…………………………………… 2 分

把 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代入 $\rho=2\cos\theta+4\sin\theta$，$\rho^2=2\rho\cos\theta+4\rho\sin\theta$，

得到曲线 C_2 的极坐标方程 $(\rho\cos\theta-1)^2+(\rho\sin\theta-2)^2=5$，

化简的曲线 C_2 的普通方程为：C_2：$(x-1)^2+(y-2)^2=5$；………………………………… 5 分

(2) 依题意设 $M(\rho_1,\frac{\pi}{4})$，$N(\rho_2,\frac{\pi}{4})$，

∵ 曲线 C_1 的极坐标方程为 $3(\rho\cos\theta)^2+(\rho\sin\theta)^2=3$，

将 $\theta=\frac{\pi}{4}(\rho>0)$ 代入曲线 C_1 的极坐标方程，

得 $3(\frac{1}{\sqrt{2}}\rho)^2+(\frac{1}{\sqrt{2}}\rho)^2=3$，

解得 $\rho_1=\frac{\sqrt{6}}{2}$，………………………………… 7 分

同理，将 $\theta=\frac{\pi}{4}(\rho>0)$ 代入曲线 C_2 的极坐标方程 $\rho=2\cos\theta+4\sin\theta$，

得 $\rho_2=3\sqrt{2}$，………………………………… 9 分

∴ $|MN|=|\rho_1-\rho_2|=3\sqrt{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}$. ……………………………………………… 10 分

23. (1) 当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)=|x-2|+3|x|=(2-x)-3x=2-4x$，

由 $f(x)\geqslant 10$，得 $2-4x\geqslant 10$，解得 $x\leqslant -2$；……………………………………………… 2 分

当 $0<x<2$ 时，$f(x)=|x-2|+3|x|=(2-x)+3x=2+2x$，

由 $f(x)\geqslant 10$，得 $2+2x\geqslant 10$，解得 $x\geqslant 4$，此时不等式 $f(x)\geqslant 10$ 无解；…………… 3 分

当 $x\geqslant 2$ 时，$f(x)=|x-2|+3|x|=(x-2)+3x=4x-2\geqslant 10$，

解得 $x\geqslant 3$；………………………………… 4 分

综上所述，不等式 $f(x)\geqslant 10$ 的解集为 $(-\infty,2]\cup[3,+\infty)$；………………………… 5 分

(2) 证明：

由(1)可知 $f(x)=\begin{cases}2-4x,x\leqslant 0,\\ 2+2x,0<x<2,\\ 4x-2,x\geqslant 2,\end{cases}$

当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant 2$；

当 $0<x<2$ 时，$f(x)>2$；

当 $x\geqslant 2$ 时，$f(x)\geqslant 6$，

所以函数 $y=f(x)$ 的最小值为 $m=2$，则 $a+b+c=2$ ………………………………… 7 分

由柯西不等式可得 $(1+1+1)(a^2+b^2+c^2)\geqslant(a+b+c)^2$，

即 $3(a^2+b^2+c^2)\geqslant 2^2$，即 $a^2+b^2+c^2\geqslant\frac{4}{3}$，

当且仅当 $a=b=c=\frac{2}{3}$ 时等号成立，

因此 $a^2+b^2+c^2\geqslant\frac{4}{3}$. …………… 10 分