数 学

座位号________ 考生号________ 姓名________

注意事项：

1. 本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分。答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 回答第Ⅰ卷时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。写在本试卷上无效。

3. 回答第Ⅱ卷时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。

4. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第Ⅰ卷

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|x^2<2x\}$，集合 $B=\{x|\log_2(x-1)<1\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{x|0<x<3\}$　　B. $\{x|1<x<2\}$

C. $\{x|2\leqslant x<3\}$　　D. $\{x|0<x<2\}$

2. 设复数 z 满足 $z\cdot(1-\mathrm{i})=2+\mathrm{i}$，则 z 的虚部是

A. $\frac{3}{2}$　　B. 3　　C. $-\frac{3}{2}$　　D. 4

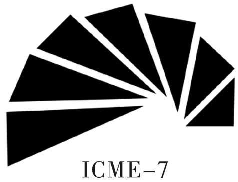
3. 设 O 为正方形 $ABCD$ 的中心，在 O,A,B,C,D 中任取3点，则取到的3点共线的概率为

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{2}{5}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{4}{5}$

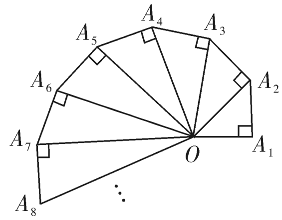
4. 蹴鞠(如图所示)，又名蹴球、蹴圆、筑球、踢圆等，蹴有用脚蹴、踢、蹋的含义，鞠最早系外包皮革、内实米糠的球. 因而蹴鞠就是指古人以脚蹴、蹋、踢皮球的活动，类似于今日的足球. 2006年5月20日，蹴鞠作为非物质文化遗产经国务院批准已列入第一批国家非物质文化遗产名录. 已知某鞠(球)的表面上有四个点 A,B,C,P，$AC=BC=4$，$PA=2$，$AC\perp BC$，$PA\perp$平面 ABC，则该鞠(球)的表面积为

A. 49π　　B. 64π　　C. 36π　　D. 16π

5. 如图甲是第七届国际数学家大会(简称 ICME-7)的会徽图案，会徽的主题图案是由图乙的一连串直角三角形演化而成的. 已知 $OA_1=A_1A_2=A_2A_3=A_3A_4=A_4A_5=A_5A_6=A_6A_7=A_7A_8=\cdots=2$，$A_1,A_2,A_3,\cdots$为直角顶点，设这些直角三角形的周长从小到大组成的数列为$\{a_n\}$，令 $b_n=\frac{2}{a_n-2}$，S_n 为数列$\{b_n\}$的前 n 项和，则 $S_{120}=$



图甲



图乙

A. 8　　　　B. 9　　　　C. 10　　　　D. 11

6. 函数 $f(x)=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$恒有 $f(x)\leqslant f(2\pi)$，且 $f(x)$在$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$上单调递增，则 ω 的值为

A. $\frac{5}{6}$　　　　B. $\frac{1}{6}$　　　　C. $\frac{7}{6}$　　　　D. $\frac{1}{6}$或$\frac{7}{6}$

7. 已知函数 $f(x)=(mx-1)e^x-x^2$，若不等式 $f(x)<0$ 的解集中恰有两个不同的正整数解，则实数 m 的取值范围是

A. $\left(\frac{2}{e^2}+\frac{1}{2},\frac{1}{e}+1\right)$　　　　B. $\left[\frac{2}{e^2}+\frac{1}{2},\frac{1}{e}+1\right)$

C. $\left[\frac{3}{e^3}+\frac{1}{3},\frac{2}{e^2}+\frac{1}{2}\right)$　　　　D. $\left(\frac{3}{e^3}+\frac{1}{3},\frac{2}{e^2}+\frac{1}{2}\right)$

8. 已知双曲线 $4x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，点 M 是双曲线右支上一点，满足$\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=0$，点 N 是 F_1F_2 线段上一点，满足$\overrightarrow{F_1N}=\lambda\overrightarrow{F_1F_2}$. 现将$\triangle MF_1F_2$ 沿 MN 折成直二面角 F_1-MN-F_2，若使折叠后点 F_1,F_2 距离最小，则 λ 为

A. $\frac{2}{3}$　　　　B. $\frac{3}{5}$　　　　C. $\frac{4}{13}$　　　　D. $\frac{9}{13}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知实数 a,b,c 满足 $0<a<b<c$，则下列说法正确的是

A. $\frac{1}{c-a}>\frac{1}{b-a}$　　　　B. $\frac{b}{a}>\frac{b+c}{a+c}$

C. $\frac{1}{a(c-a)}>\frac{1}{b(c-a)}$　　　　D. $ab+c^2>ac+bc$

10. 已知函数 $f(x)(x\in\mathbf{R})$是奇函数，$f(x+2)=f(-x)$且 $f(1)=2$，$f'(x)$是 $f(x)$的导函数，则

A. $f(2023)=2$　　　　B. $f'(x)$的一个周期是 4

C. $f'(x)$是偶函数　　　　D. $f'(1)=1$

11. 已知圆 C：$(x-2)^2+(y-3)^2=4$，恒过点 $A(1,3)$的直线 l 与圆 C 交于 P,Q 两点. 下列说法正确的是

A. $|PQ|$的最小值为 $2\sqrt{2}$

B. $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PQ}\in[6,8]$

C. $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CQ}$的最大值为$-2$

D. 过点 C 作直线 l 的垂线，垂足为点 B，则点 B 的运动轨迹在某个定圆上

12. 随着时代与科技的发展，信号处理以各种方式被广泛应用于医学、声学、密码学、计算机科学、量子力学等各个领域. 而信号处理背后的“功臣”就是正弦型函数，$f(x)=\sum\limits_{i=1}^{4}\dfrac{\sin[(2i-1)x]}{2i-1}$ 的图象就可以近似的模拟某种信号的波形，则下列说法正确的是

A. 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称

B. 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(0,0)$ 对称

C. 函数 $f(x)$ 为周期函数，且最小正周期为 π

D. 函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的最大值为 4

第Ⅱ卷

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 二项式 $\left(2\sqrt{x}-\dfrac{a}{\sqrt{x}}\right)^n$ 的展开式中所有二项式系数和为 64，且展开式中的常数项为 -160，则 $a=$________.

14. 已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，且满足 $f(x)=x^3-x\cdot f'(2)$，则函数 $f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线方程为__________.

15. 在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=1$，$AA_1=4$，E 为 DD_1 的中点，P 为正四棱柱表面上一点，且 $C_1P\perp B_1E$，则点 P 的轨迹的长度为__________.

16. 意大利数学家斐波那契在研究兔子繁殖问题时发现了数列 1，1，2，3，5，8，13，…，数列中的每一项被称为斐波那契数，记作 F_n. 已知 $F_1=1$，$F_2=1$，$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$（$n\in\mathbf{N}^*$，且 $n>2$）.

(1) 若斐波那契数 F_n 除以 4 所得的余数按原顺序构成数列 $\{a_n\}$，则 $a_1+a_2+a_3\cdots+a_{2023}=$________.

(2) 若 $F_{2024}=a$，则 $F_1+F_2+F_3+\cdots+F_{2022}=$________.

四、解答题（共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17. (10 分) 在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_{n+1}=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)a_n+\dfrac{n+1}{2^n}$.

(1) 设 $b_n=\dfrac{a_n}{n}$，求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式；

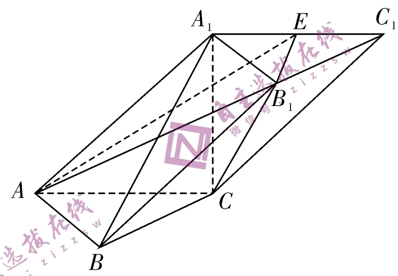
(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

18.(12 分)已知向量 $\boldsymbol{m}=(-2,\sin 2x)$,$\boldsymbol{n}=(\cos^2 x,\sqrt{3})$,且函数 $f(x)=\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}$.

(1)求 $f(x)$的最小正周期及对称中心;

(2)在△ABC 中,内角 A,B,C 的对边分别为a,b,c,角 A 为锐角,$a=\sqrt{7}$.若 $f\left(\frac{1}{2}A+\frac{\pi}{12}\right)+1=\frac{\sqrt{7}}{3}b\sin C$,且△$ABC$ 的面积为$\frac{3\sqrt{3}}{2}$,求△ABC 的周长.

19.(12 分)如图,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,△ABC 是边长为 2 的等边三角形,$A_1C\perp BC$,平面 $AA_1C_1C\perp$平面 ABC.



(1)证明:$A_1A=A_1B$;

(2)若 E 为A_1C_1 的中点,直线 B_1B 与平面ABC 所成的角为 45°,求直线 B_1C 与平面AB_1E 所成的角的正弦值.

20.(12 分)已知圆 E:$(x+\sqrt{2})^2+y^2=16$,$F(\sqrt{2},0)$,T 是圆 E 上任意一点,线段 FT 的垂直平分线与半径ET 相交于点Q,当点 T 运动时,点 Q 的轨迹为曲线C.

(1)求曲线 C 的方程;

(2)过点 $A(2,0)$的直线与曲线 C 相交于点 $H\left(-\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$,与 y 轴相交于点S,过点 S 的另一条直线 l 与 C 相交于M,N 两点,且△ASM 的面积是△HSN 面积的$\frac{3}{2}$倍,求直线 l 的方程.

21.(12 分)人工智能(AI)是一门极富挑战性的科学,自诞生以来,理论和技术日益成熟.某校成立了 A,B 两个研究性小组,分别设计和开发不同的 AI 软件用于识别音乐的类别.记两个研究性小组的 AI 软件每次能正确识别音乐类别的概率分别为 P_1,P_2.为测试 AI 软件的识别能力,计划采取两种测试方案.

方案一:将 100 首音乐随机分配给 A,B 两个小组识别,每首音乐只被一个 AI 软件识别一次,并记录结果;

方案二:对同一首歌,A,B 两组分别识别两次,如果识别的正确次数之和不少于三次,则称该次测试通过.

(1)若方案一的测试结果如下:正确识别的音乐数之和占总数的$\frac{3}{5}$;在正确识别的音乐数中,A 组占$\frac{2}{3}$;在错误识别的音乐数中,B 组占$\frac{1}{2}$.

(i)请根据以上数据填写下面的 2×2 列联表,并根据 $\alpha=0.05$ 的独立性检验,能否认为识别音乐是否正确与两种软件类型有关?

	正确识别	错误识别	合计
A 组软件			
B 组软件			
合计			100

(ii)利用(i)中的数据,视频率为概率,求方案二在一次测试中获得通过的概率;

(2)研究性小组为了验证 AI 软件的有效性,需多次执行方案二,假设 $P_1+P_2=\frac{4}{3}$,问该测试至少要进行多少次,才能使通过次数的期望值为 16?并求此时 P_1,P_2 的值.

附:$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,其中 $n=a+b+c+d$.

α	0.100	0.050	0.010	0.005	0.001
x_α	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

22.(12 分)已知函数 $f(x)=(\cos x-1)e^{-x}$,$g(x)=ax^2+(1-e^x)x\ (a\in\mathbf{R})$.

(1)当 $x\in(0,\pi)$时,求函数 $f(x)$的最小值;

(2)当 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},+\infty\right)$时,不等式 $xf(x)\geqslant\frac{g(x)}{e^x}$恒成立,求实数 a 的取值范围.