

绝密★启用前

## 2021 年普通高等学校招生全国统一考试(样卷一)

# 数 学 理 科

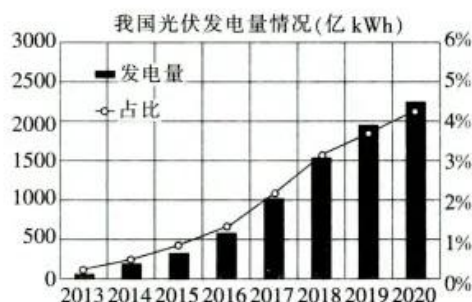
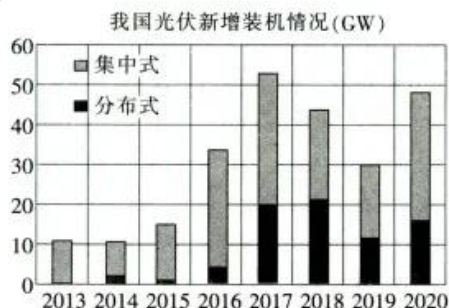
本试卷共 23 题,共 150 分,考试时间 120 分钟,考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

### 注意事项:

1. 答题前,考生先将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写清楚,将条形码准确粘贴在条形码区域内.
2. 选择题必须使用 2B 铅笔填涂;非选择题必须使用 0.5 毫米黑色字迹的签字笔书写,字体工整,笔迹清楚.
3. 请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答,超出答题区域书写的答案无效;在草稿纸、试卷上答题无效.
4. 作图可先使用铅笔画出,确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑.
5. 保持卡面清洁,不要折叠,不要弄破、弄皱.不准使用涂改液、修正带、刮纸刀.

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合  $A = \{x | x^2 + 3 < 4x\}$ ,  $B \subseteq \mathbf{N}^+$ , 且  $A \cap B \neq \emptyset$ , 则下列结论中一定正确的是  
 A.  $1 \in A$                       B.  $B = \{2\}$                       C.  $2 \in B$                       D.  $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cap B = \emptyset$
2. 若纯虚数  $z$  满足  $z = \frac{a+3i}{1-2i}$  ( $a \in \mathbf{R}$ ), 则  $\bar{z} =$   
 A.  $-3i$                       B.  $-2i$                       C.  $2i$                       D.  $3i$
3. 为达成“碳达峰、碳中和”的目标,我们需坚持绿色低碳可持续发展道路.可再生能源将会有一个快速发展的阶段.太阳能是一种可再生能源,光伏是太阳能光伏发电系统的简称,主要有分布式与集中式两种方式.下面的图表是近年来中国光伏市场发展情况表.则下列结论中正确的是



- A. 2013~2020 年,年光伏新增装机规模同比(与上年相比)增幅逐年递减
  - B. 2013~2020 年,年光伏发电量与年份成负相关
  - C. 2013~2020 年,年新增装机规模中,分布式的平均值大于集中式的平均值
  - D. 2013~2020 年,每年光伏发电量占全国发电总量的比重与年份成正相关
4. 设  $S_n$  是等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和,若  $S_5 = 5a_5 + 5$ , 则公差  $d =$   
 A.  $-1$                       B.  $-\frac{1}{2}$                       C.  $\frac{1}{2}$                       D.  $1$

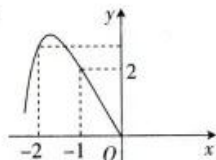
5. 已知  $F_1, F_2$  是椭圆  $E: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  的左、右焦点,  $P$  是  $E$  上在第一象限内一点,  $F_1$  关于直线  $PF_2$  的对称点为  $A, F_2$  关于直线  $PF_1$  的对称点为  $B$ , 则  $|AB|$  的最大值为

- A.  $4\sqrt{2}$                       B. 5                      C.  $\frac{9}{2}$                       D. 4

6.  $(2x - \frac{1}{\sqrt{x}})^7$  展开式中  $x^{-2}$  的系数为

- A. -14                      B. 14                      C. -84                      D. 84

7. 已知定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数  $f(x)$  的部分图象如图所示,  $f'(x)$  是  $f(x)$  的导函数, 则



- A.  $f(2) = -1$   
B.  $f(1) \cdot f(2) < 4$   
C.  $f'(1) \cdot f'(2) < 0$   
D. 方程  $f'(x) = 0$  无解

8. 已知圆  $M: (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$ , 圆  $N: (x+2)^2 + (y+1)^2 = 1$ , 则下列不是  $M, N$  两圆公切线的直线方程为

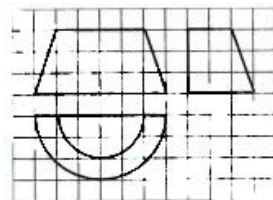
- A.  $y = 0$                       B.  $4x - 3y = 0$   
C.  $x - 2y + \sqrt{5} = 0$                       D.  $x + 2y - \sqrt{5} = 0$

9. 已知向量  $\mathbf{a} = (1, \sqrt{3}), \mathbf{b} = (x, 1)$ , 则下列所有正确结论的序号是

- ①  $\exists x \in (-\infty, 0)$ , 使得  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \parallel \mathbf{b}$     ②  $\exists x \in (0, +\infty)$ , 使得  $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \perp \mathbf{b}$     ③  $\forall x \in [0, +\infty)$ ,  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$  小于  $\frac{\pi}{3}$     ④  $\forall x \in (-\infty, 0]$ ,  $|2\mathbf{a} - \sqrt{3}\mathbf{b}| > \sqrt{7}$

- A. ①③                      B. ①④                      C. ②③                      D. ②④

10. 如图, 网格纸上的小正方形的边长为 1, 粗实线画出的是某几何体的三视图, 则该几何体的外接球的表面积为



- A.  $\frac{116\pi}{3}$   
B.  $\frac{340\pi}{9}$   
C.  $\frac{532}{3}\pi$   
D.  $\frac{340\sqrt{85}}{81}\pi$

11. 已知  $2^a = \ln b = e^c = \log_2 d$ , 则

- A.  $\log_2(b-d) > e^{a-c}$                       B.  $e^{a+b} > e^{c+d}$   
C.  $\ln|a-c| < 2^{b-d} (a \neq c)$                       D.  $(\frac{1}{2})^{b+c} < (\frac{1}{2})^{a+d}$

12. 在数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = a, a_{n+1} = 4(a_n - a_n^2) (n \in \mathbf{N}^*)$ , 若  $a_6 = 0$ , 则实数  $a$  的不同取值的个数为

- A. 17                      B. 16                      C. 15                      D. 14

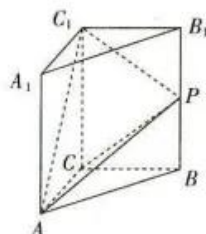
二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 设  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq x - y \leq 1 \end{cases}$ , 则  $z = x + 2y$  的最大值为 \_\_\_\_\_.

14. 已知函数  $f(x) = \pi \sin(\omega x - \frac{\pi}{6}) (\omega > 0)$ , 设  $A, B$  是函数图象的两条相邻对称轴与函数图象的交点, 且  $|AB| = \frac{5}{2}\pi$ , 则  $\omega =$  \_\_\_\_\_.

15. 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的焦距为  $2c$ ,  $A$  是  $C$  的右顶点, 在  $C$  的一条渐近线上存在  $M, N$  两点, 使得  $|AM| = |AN| = c$ , 且  $\angle MAN = 120^\circ$ , 则  $C$  的离心率为\_\_\_\_\_.

16. 2020 年底, 中国科学家成功构建了 76 个光子的量子计算机“九章”, 推动全球量子计算的前沿研究达到一个新高度. 该量子计算机取名“九章”, 是为了纪念中国古代著名的数学专著《九章算术》. 在《九章算术》中, 底面是直角三角形的直三棱柱被称为“堑堵”. 如图, 棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  为一“堑堵”,  $P$  是  $BB_1$  的中点,  $AA_1 = AC = BC = 2$ , 设平面  $\alpha$  过点  $P$  且与  $AC_1$  平行, 现有下列四个结论:



①当平面  $\alpha$  截棱柱的截面图形为等腰梯形时, 该图形的面积等于  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ;

②当平面  $\alpha$  截棱柱的截面图形为直角梯形时, 该图形的面积等于  $2\sqrt{2}$ ;

③异面直线  $AC_1$  与  $CP$  所成角的余弦值为  $\frac{\sqrt{10}}{10}$ ;

④三棱锥  $C_1-ACP$  的体积是该“堑堵”体积的  $\frac{1}{3}$ .

所有正确结论的序号是\_\_\_\_\_.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. (12 分)

已知  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ,  $c(1 + \cos A) = \sqrt{3}a \sin C$ .

(1) 求  $A$ ;

(2) 若  $a = 2\sqrt{3}$ ,  $B < A$ ,  $D$  为  $BC$  的中点, 且  $AD = \sqrt{5}$ , 求  $b$ .

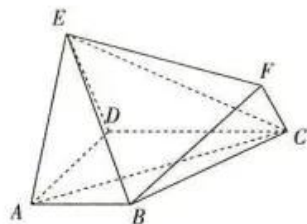
18. (12 分)

如图, 在多面体  $ABCDEF$  中, 四边形  $ABCD$  和  $CDEF$  均为直角梯形,  $AB \parallel CD$ ,  $CF \parallel DE$ ,

且  $\angle CDE = \angle CDA = \frac{\pi}{2}$ ,  $CD = AD = 2AB = 4$ ,  $DE = AE = 2CF = 2\sqrt{5}$ .

(1) 求证:  $BF \parallel$  平面  $ACE$ .

(2) 求直线  $AC$  与平面  $BEF$  所成角的正弦值.



19. (12 分)

已知抛物线  $C: y^2 = 2px (p > 0)$  的焦点为  $F$ , 点  $P(t, -2)$  在  $C$  上, 且  $|PF| = 2|OF|$  ( $O$  为坐标原点).

(1) 求  $C$  的方程;

(2) 若  $A, B$  是  $C$  上的两个动点, 且  $A, B$  两点的横坐标之和为 8, 求当  $|AB|$  取最大值时, 直线  $AB$  的方程.

20. (12分)

中国乒乓球队是中国体育军团的王牌之师,屡次在国际大赛上争金夺银,被体育迷们习惯地称为“梦之队”.小明是一名乒乓球运动爱好者,为提高乒乓球水平,决定在假期针对乒乓球技术的五个基本因素:弧线、力量、速度、旋转和落点进行训练.假设小明每天进行多次分项(将五个因素分别对应五项,一次练一项)训练,为增加趣味性,计划每次(从第二次起)都是从上次未训练的四个项目中等可能地随机选一项训练.

- (1)若某天在五个项目中等可能地随机选一项开始训练,求第三次训练的是“弧线”的概率;
- (2)若某天仅进行了6次训练,五个项目均有训练,且第1次训练的是“旋转”,前后训练项不同视为不同的训练顺序,设变量  $X$  为6次训练中“旋转”项训练的次数,求  $X$  的分布列及期望;
- (3)若某天规定第一次训练的是“力量”,从第二次起,后面训练项的选择服从上述计划的安排,设  $P_i (i \in \mathbb{N}^*)$  表示第  $i$  次训练的是“力量”的概率,求  $P_6$  的值.

21. (12分)

已知函数  $f(x) = x \ln x - ax^2, a \in \mathbb{R}$ .

(1)设  $a \geq \frac{1}{2}, g(x) = f(e^x)$ , 讨论函数  $g(x)$  的单调性;

(2)若函数  $f(x)$  存在两个不同的极值点  $x_1, x_2$ , 且  $x_1 < x_2, f(x_2) > 0$ , 求证:  $\frac{f(x_2)}{a(x_2 - e)} > 1$ .

(二)选考题:共10分.请考生在第22、23题中任选一题作答.如果多做,则按所做的第一题计分.

22. [选修4—4:坐标系与参数方程](10分)

在平面直角坐标系  $xOy$  中,曲线  $C$  的参数方程为  $\begin{cases} x=2+t^2 \\ y=2t^4+1 \end{cases}$  ( $t$  为参数),以坐标原点  $O$  为极点,  $x$  轴的正半轴为极轴建立极坐标系,倾斜角为  $\alpha$  的直线  $l$  的极坐标方程为  $\rho \sin(\alpha - \theta) = 2\sqrt{3} \sin(\alpha - \frac{\pi}{6})$ .

(1)若  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , 求  $l$  与  $C$  的交点的极坐标 ( $\rho \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi$ );

(2)若  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ , 设  $M$  是  $C$  上的动点,求  $M$  到  $l$  的距离的最小值.

23. [选修4—5:不等式选讲](10分)

设  $a, b, c$  为非零实数,且  $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ , 证明:

(1)  $|a+b+c| \leq 3$ ;

(2)  $\frac{a^4}{b^2+c^2} + \frac{b^4}{a^2+c^2} + \frac{c^4}{a^2+b^2} \geq \frac{3}{2}$ .

## 关于我们

**自主选拔在线**（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95% 以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承 “专业、专注、有态度” 的创办公念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网 “年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。



 微信搜一搜

 自主选拔在线