2023届高三一轮复习联考(三)
数 学 试 题

注意事项:

1.答卷前,考生务必将自己的姓名、考场号、座位号、准考证号填写在答题卡上。

2.回答选择题时,选出每小题答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3.考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

考试时间为120分钟,满分150分

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1.已知集合 $A=\{x\mid 1<x<2\}$,$B=\{x\mid x^2\leqslant 1\}$,则 $A\cup B=$

A.$[-1,2)$　　B.$(-\infty,2)$　　C.$[-1,3)$　　D.$[-1,2]$

2.已知复数 $z=\mathrm{i}(\mathrm{i}+1)$,则 $|\bar{z}|=$

A.1　　B.$\sqrt{2}$　　C.$\sqrt{3}$　　D.2

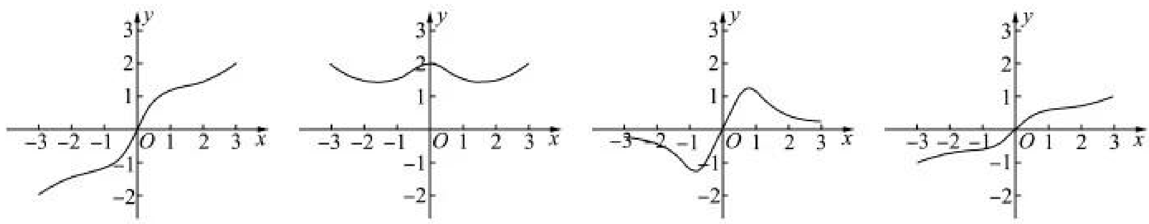
3.若函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-2x, & x\leqslant 0,\\ \log_2 x, & x>0,\end{cases}$ 则 $f[f(-2)]=$

A.-2　　B.2　　C.-3　　D.3

4.已知$\{a_n\}$是各项不全为零的等差数列,前 n 项和是 S_n,且 $S_{20}=S_{24}$,若 $S_m=S_{26}(m\neq 26)$,则正整数 $m=$

A.20　　B.19　　C.18　　D.17

5.函数 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{x^2+1}$ 在$[-3,3]$上的大致图象为



A　　B　　C　　D

6.已知等比数列$\{a_n\}$满足 $q^2\neq 1$,$a_4^2=a_m a_n$,(其中 $m,n\in\mathbf{N}^*$),则$\dfrac{9}{m}+\dfrac{1}{n}$的最小值为

A.6　　B.16　　C.$\dfrac{3}{2}$　　D.2

7.设 $a=4\sin 1$，$b=3\sin 2$，$c=2\sin 3$，则

A.$a<b<c$　　B.$c<b<a$　　C.$c<a<b$　　D.$a<c<b$

8.已知方程 $|\cos x|-kx=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有且仅有两个不同的解 α、$\beta(\alpha<\beta)$，则下列结论正确的是

A.$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1+\alpha}{1-\alpha}$　　B.$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1-\alpha}{1+\alpha}$

C.$\tan\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\beta-1}{1+\beta}$　　D.$\tan\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1+\beta}{\beta-1}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9.已知命题 p：$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-2x+m>0$，则满足命题 p 为真命题的一个充分条件是

A.$m>2$　　B.$m<0$　　C.$m<-1$　　D.$m\geqslant 3$

10.设 m，n 为不重合的直线，α，β，γ 为不重合的平面，下列是 $\alpha /\!/ \beta$ 成立的充分条件的有

A.$m\subset\alpha$，$n\perp\beta$，$n\perp m$　　B.$m\cap n=P$，$m\subset\alpha$，$n\subset\alpha$，$m/\!/\beta$，$n/\!/\beta$

C.$\alpha\perp\gamma$，$\beta\perp\gamma$　　D.$m\perp\alpha$，$m\perp\beta$

11.已知函数 $f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$，若 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上的值域是 $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$，则实数 a 的可能取值为

A.$\frac{\pi}{3}$　　B.$\frac{2\pi}{3}$　　C.$\frac{4\pi}{3}$　　D.$\frac{5\pi}{3}$

12.已知函数 $f(x)=\begin{cases}4\sin \pi x, & 0<x\leqslant 1,\\ 2^{x-1}+x, & x>1,\end{cases}$ 若关于 x 的方程 $[f(x)]^2-(2-m)f(x)+1-m=0$ 恰有 5 个不同的实数解，则下列说法正确的是

A.$m=0$ 时方程有两个不相等的实数解

B.$m>0$ 时方程至少有 3 个不相等的实数解

C.$m<0$ 时方程至少有 3 个不相等的实数解

D.若方程恰有 5 个不相等的实数解，则实数 m 的取值集合为 $(-3,-1)$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13.已知 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$，则 $\cos\left(2\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)=$________.

14.若关于 x 的不等式 $x^2-6x+2-a>0$ 在区间 $[0,5]$ 内有解，则实数 a 的取值范围是________.

15.已知数列$\{a_n\}$为递减数列，其前 n 项和 $S_n=-n^2+2n+m$，则实数 m 的取值范围是______.

16.已知 A,B,C 均在球 O 的球面上运动，且满足$\angle AOB=\frac{\pi}{3}$，若三棱锥 $O-ABC$ 体积的最大值为 6，则球 O 的体积为______.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.(10 分)已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=2$，$\log_2 a_{n+1}=\log_2 a_n+1$，

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)求$\{(3n-2)a_n\}$的前 n 项和 S_n.

18.(12 分)已知 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$，$\boldsymbol{c}=(x_3,y_3,z_3)$，定义一种运算：

$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=x_1y_2z_3+x_2y_3z_1+x_3y_1z_2-x_1y_3z_2-x_2y_1z_3-x_3y_2z_1$，

在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$\overrightarrow{AB}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{AD}=(0,2,2)$，$\overrightarrow{AA_1}=(1,-1,1)$，

(1)证明：平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是直四棱柱；

(2)计算$|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AA_1}|$，并求该平行六面体的体积，说明$|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AA_1}|$的值与平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 体积的关系.

19.(12 分)已知$\triangle ABC$ 中，三个内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，$C=\frac{\pi}{4}$，$a\cos A+c\cos C=2b\cos B$.

(1)求 $\tan A$；

(2)若 $c=2\sqrt{5}$，求$\triangle ABC$ 的面积.

20.(12 分)已知数列$\{a_n\}$满足 $2a_1+2^2a_2+\cdots+2^{n-1}a_{n-1}+2^na_n=(2n-3)\cdot 2^{n+1}+6$.

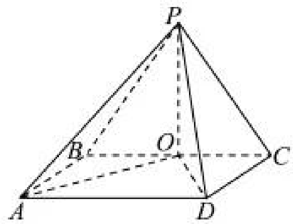
(1)求$\{a_n\}$的通项公式;

(2)若 $b_n=2^{a_n}+a_n$,求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n.

21.(12 分)如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 是矩形,O 是 BC 的中点,$PB=PC=\sqrt{3}$,$PD=BC=2AB=2$.

(1)求证:平面 $PBC\perp$平面 $ABCD$;

(2)求直线 AD 与平面 PCD 所成角的正弦值.



22.(12 分)已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}-\ln x+1$.

(1)求曲线 $y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程;

(2)证明:对 $\forall x\in(0,+\infty)$,均有 $f(x)<\dfrac{1+e^{-2}}{\ln(x+1)}+2$.

2023 届高三一轮复习联考(三)

数学参考答案及评分意见

1.A 【解析】由 $x^2\leqslant 1$，即 $(x-1)(x+1)\leqslant 0$，解得 $-1\leqslant x\leqslant 1$，所以 $B=\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$，所以 $A\cup B=\{x|-1\leqslant x<2\}$．故选 A.

2.B 【解析】$z=\mathrm{i}(\mathrm{i}+1)=-1+\mathrm{i}$，则 $\bar{z}=-1-\mathrm{i}$，即 $|\bar{z}|=\sqrt{2}$，故选 B.

3.D 【解析】$f(-2)=(-2)^2-2\times(-2)=8$，$f(8)=\log_2 8=3$，故选 D.

4.C 【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项和公差分别为 a_1，d，则 $S_n=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$，所以 S_n 可看成关于 n 的二次函数，由二次函数图象的对称性及 $S_{20}=S_{24}$，$S_m=S_{26}$，可得 $\frac{20+24}{2}=\frac{26+m}{2}$，解得 $m=18$．故选 C.

5.A 【解析】$f(-x)=\frac{e^{-x}-e^{x}}{x^2+1}=-f(x)$，所以函数 $y=f(x)$ 是奇函数，排除 B 选项，又 $f(2)=\frac{e^2-e^{-2}}{5}>1$，排除 C，D 选项，故选 A.

6.D 【解析】由等比数列的性质，可得 $m+n=8$，$\frac{9}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{8}(m+n)\left(\frac{9}{m}+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{8}\left(10+\frac{m}{n}+\frac{9n}{m}\right)\geqslant\frac{1}{8}\left(10+2\sqrt{\frac{m}{n}\cdot\frac{9n}{m}}\right)=2$，当且仅当 $m=6$，$n=2$ 时，等号成立，因此，$\frac{9}{m}+\frac{1}{n}$ 的最小值为 2．故选 D.

7.B 【解析】设 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$，$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$，令 $g(x)=x\cos x-\sin x$，则 $g'(x)=-x\sin x$，

当 $x\in(0,\pi)$ 时，$g'(x)<0$，故 $g(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上递减，$g(x)<g(0)=0$，$\therefore f'(x)<0$，故 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 在 $(0,\pi)$ 上递减，$\because 0<2<3<\pi$，

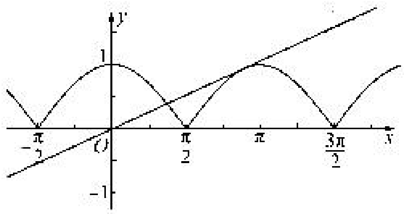
$\therefore f(3)<f(2)$，$\frac{\sin 3}{3}<\frac{\sin 2}{2}$，$2\sin 3<3\sin 2$，故 $c<b$，

$\because 0<1<\pi-2<\pi$，$\frac{\sin(\pi-2)}{\pi-2}<\sin 1$，$\sin 2<(\pi-2)\sin 1$，$3\sin 2<3(\pi-2)\sin 1<4\sin 1$，故 $b<a$，

故 $c<b<a$，故选 B.

8.C 【解析】要使方程 $|\cos x|-kx=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个不同的解，

则 $f(x)=|\cos x|$ 的图象与直线 $y=kx(k>0)$ 有且仅有两个公共点，



所以直线 $y=kx$ 与 $f(x)=|\cos x|$ 的图象在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 内相切，此时 $f(x)=|\cos x|=-\cos x$，

$f'(x)=\sin x$，设切点 $(\beta,-\cos\beta)$，

由 $\sin\beta=\frac{-\cos\beta-0}{\beta-0}\Rightarrow\tan\beta=-\frac{1}{\beta}$，

$\therefore\tan\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\beta-1}{1+\beta}$.

又由图可知 $|\cos\alpha|=k\alpha$，所以 $\cos\alpha=\alpha\sin\beta$，故 A，B 不正确.

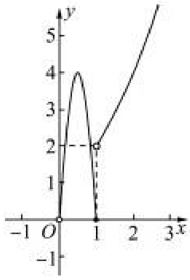
故选 C.

9.AD 【解析】$\because$ 命题 p 为真命题，$\therefore$ 不等式 $x^2-2x+m>0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，$\therefore\Delta=4-4m<0$，解得 $m>1$，命题 p 为真命题的一个充分条件即所求范围 $\{m|m>1\}$ 的子集，故选 AD.

10.BD 【解析】根据线面的位置关系易知，A，C 中面 α 和面 β 可能相交也可能平行，由两个平面平行的判定定理可知 B 正确；若 $m\perp\alpha$ 且 $m\perp\beta$，根据面面平行的判定可知垂直于同一直线的两平面互相平行，故 D 正确，故选 BD.

11.BC 【解析】$f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$，结合图象，$f(x)$ 的值域是 $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$，可知 a 的取值范围是 $\left[\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right]$．故选 BC.

12.ACD 【解析】作出函数 $f(x)$ 的大致图象，如图所示，



令 $t=f(x)$，则 $[f(x)]^2-(2-m)f(x)+1-m=0$ 可化为 $t^2-(2-m)t+1-m=(t-1+m)(t-1)=0$，

则 $t_1=1$ 或 $t_2=1-m$，则关于 x 的方程 $[f(x)]^2-(2-m)f(x)+1-m=0$ 的实数解等价于 $t=f(x)$ 的图象与直线 $t=t_1$，$t=t_2$ 的交点个数，

对于 A，当 $m=0$ 时，则 $t_1=t_2=1$，此时 $[f(x)]^2-2f(x)+1=0$ 有两个不相等的实数解，故 A 正确；

对于 B，$m>0$ 时，取 $m=2$，则 $t_1=1$ 或 $t_2=-1$，因为 $f(x)$ 的值域为 $[0,+\infty)$，故方程只有 2 个不相等的实数解，故 B 错误；

对于 C，$m<0$ 时，$t_2=1-m>1$，$y=t_2$ 与函数图象至少有 1 个交点，故 C 正确；

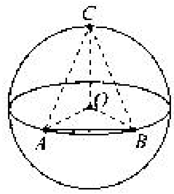
对于 D，若关于 x 的方程 $[f(x)]^2-(2-m)f(x)+1-m=0$ 恰有 5 个不同的实数解等价于 $t=f(x)$ 的图象与直线 $t=t_1$，$t=t_2$ 的交点个数之和为 5 个，由图可得函数 $t=f(x)$ 的图象与直线 $t=t_1$ 的交点个数为 2，所以 $t=f(x)$ 的图象与直线 $t=t_2$ 的交点个数为 3 个，即此时 $2<1-m<4$，解得 $-3<m<-1$，故 D 正确，故选 ACD.

13.$-\frac{1}{2}$ 【解析】因为 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$，所以 $\cos\left(2\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left[2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+\pi\right]=-\cos\left[2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\right]=2\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)-1=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$，故答案为 $-\frac{1}{2}$.

14.$(-\infty,2)$ 【解析】设 $f(x)=x^2-6x+2$，图象开口向上，对称轴为直线 $x=3$，所以要使不等式 $x^2-6x+2-a>0$ 在区间 $(0,5)$ 内有解，只要 $a<f(x)_{\max}$ 即可，因 $f(0)=2$，得 $a<2$，所以实数 a 的取值范围为 $(-\infty,2)$.

15.$(-2,+\infty)$ 【解析】当 $n\geq2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=-n^2+2n+m-[-(n-1)^2+2(n-1)+m]=-2n+3$，故可知当 $n\geq2$ 时，a_n 单调递减，故 $\{a_n\}$ 为递减数列，只需满足 $a_2<a_1$，即 $-1<1+m$，得 $m>-2$.

16.$32\sqrt{3}\pi$ 【解析】如图所示，当点 C 位于垂直于面 AOB 的直径端点时，三棱锥 $O-ABC$ 的体积最大，设球 O 的半径为 R，此时 $V_{O-ABC}=V_{C-AOB}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}R^2\times R=\frac{\sqrt{3}}{12}R^3=6$，故 $R=2\sqrt{3}$，则球 O 的体积为 $V=\frac{4\pi R^3}{3}=32\sqrt{3}\pi$.



17.【解析】(1)在数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $\log_2 a_{n+1}-\log_2 a_n=\log_2\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$，…… 1 分

所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=2$，…… 2 分

即 $\{a_n\}$ 是首项为 $a_1=2$，公比为 2 的等比数列，…… 3 分

所以 $a_n=2\times2^{n-1}=2^n(n\in\mathbf{N}^*)$. …… 4 分

(2)由 $(3n-2)a_n=(3n-2)\times2^n$，

故 $S_n=1\times2+4\times2^2+7\times2^3+\cdots+(3n-5)\times2^{n-1}+(3n-2)\times2^n$，…… 6 分

所以 $2S_n=1\times2^2+4\times2^3+7\times2^4+\cdots+(3n-5)\times2^n+(3n-2)\times2^{n+1}$，…… 7 分

则 $-S_n=2+3\times[2^2+2^3+\cdots+2^n]-(3n-2)\times2^{n+1}$ …… 8 分

$=-4+3\times\frac{2(1-2^n)}{1-2}-(3n-2)\times2^{n+1}=-10+(5-3n)\cdot2^{n+1}$，…… 9 分

故 $S_n=10+(3n-5)\cdot2^{n+1}$. …… 10 分

18.【解析】(1)由题意 $\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AB}=1\times1+1\times(-1)+0\times1=0$，$\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AD}=0\times1+2\times(-1)+2\times1=0$，

$\therefore\overrightarrow{AA_1}\perp\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AA_1}\perp\overrightarrow{AD}$，即 $AA_1\perp AB$，$AA_1\perp AD$. …… 2 分

$\because AB$，AD 是平面 $ABCD$ 内两相交直线，

$\therefore AA_1\perp$ 平面 $ABCD$，

$\therefore$ 平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是直四棱柱. …… 4 分

(2) $|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AA_1}|=1\times2\times1+2\times1\times1+0-1\times(-1)\times2-0-0=6$. ······ 6 分

由题意 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{AD}|=2\sqrt{2}$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=1\times0+1\times2+0\times2=2$，

$\cos\angle BAD=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}|\times|\overrightarrow{AD}|}=\dfrac{2}{\sqrt{2}\times2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$，所以 $\sin\angle BAD=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$， ······ 7 分

$S_{ABCD}=|AB|\cdot|AD|\cdot\sin\angle BAD=\sqrt{2}\times2\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$，$|\overrightarrow{AA_1}|=\sqrt{3}$， ······ 8 分

$\therefore V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1}=S_{ABCD}\times|AA_1|=2\sqrt{3}\times\sqrt{3}=6$. ······ 9 分

$\therefore|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AA_1}|=V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1}$， ······ 10 分

猜想：$|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AA_1}|$的值表示以 AB，AD，AA_1 为邻边的平行六面体的体积. ······ 12 分

19.【解析】(1)解法一：由题，$a\cos A+c\cos C=2b\cos B$，

由正弦定理得，$\sin 2B=\sin A\cos A+\sin C\cos C$， ······ 1 分

$C=\dfrac{\pi}{4}$，$A+B+C=\pi$，$\sin 2B=\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-2A\right)=-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-2A\right)=-\cos 2A$， ······ 2 分

所以 $-\cos 2A=\sin A\cos A+\dfrac{1}{2}$， ······ 3 分

$\sin^2A-\cos^2A-\sin A\cos A=\dfrac{1}{2}$， ······ 4 分

$\dfrac{\tan^2A-1-\tan A}{\tan^2A+1}=\dfrac{1}{2}$，化简得 $\tan^2A-2\tan A-3=0$， ······ 5 分

解得 $\tan A=3$ 或 $\tan A=-1$(舍去). ······ 6 分

解法二：由题，$a\cos A+c\cos C=2b\cos B$，

由正弦定理得，$2\sin 2B=\sin 2A+\sin 2C$， ······ 1 分

即 $2\sin 2B=\sin[(A+C)+(A-C)]+\sin[(A+C)-(A-C)]$， ······ 2 分

即 $\sin 2B=\sin(A+C)\cos(A-C)$， ······ 3 分

又 $A+B+C=\pi$，故 $\sin(A+C)=\sin B$，

所以 $2\sin B\cos B=\sin B\cos(A-C)$，

又 $0<B<\pi$，故 $\sin B\neq0$，

所以 $2\cos B=\cos(A-C)$， ······ 4 分

又 $A+B+C=\pi$，故 $\cos B=-\cos(A+C)$，

化简得 $\sin A\sin C=3\cos A\cos C$， ······ 5 分

因此 $\tan A\tan C=3$ 且 $\tan C=1$，

所以 $\tan A=3$. ······ 6 分

(2)由(1)知 $\tan A=3$，

因此 $\tan B=-\tan(A+C)=-\dfrac{\tan A+\tan C}{1-\tan A\tan C}=2$， ······ 7 分

所以 $\sin A=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$， ······ 8 分

$\sin B=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$， ······ 9 分

$\sin C=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$， ······ 10 分

因为 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，$a=6$， ······ 11 分

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}\times6\times2\sqrt{5}\times\dfrac{2\sqrt{5}}{5}=12$. ······ 12 分

20.【解析】(1)由题，当 $n=1$ 时，$2a_1=(2-3)\cdot2^{1+1}+6=2$，即 $a_1=1$. ······ 1 分

$2a_1+2^2a_2+\cdots+2^{n-1}a_{n-1}+2^na_n=(2n-3)\cdot2^{n+1}+6$①，

当 $n\geqslant2$ 时，$2a_1+2^2a_2+\cdots+2^{n-1}a_{n-1}=(2n-5)\cdot2^n+6$②， ······ 3 分

①—②得 $2^n a_n=(2n-3)\cdot 2^{n+1}+6-(2n-5)\cdot 2^n-6=(2n-1)\cdot 2^n$, ………… 5分

所以 $a_n=2n-1$. ………… 6分

(2)由(1)知,$b_n=2^{a_n}+a_n=2^{2n-1}+2n-1$,

则 $T_n=(2+1)+(2^3+3)+(2^5+5)+\cdots+(2^{2n-1}+2n-1)$ ………… 8分

$=(2+2^3+2^5+\cdots+2^{2n-1})+(1+3+5+\cdots+2n-1)$ ………… 10分

$=\dfrac{2\times(1-4^n)}{1-4}+\dfrac{(1+2n-1)n}{2}=\dfrac{2^{2n+1}+3n^2-2}{3}$. ………… 12分

21.【解析】(1)因为 $PB=PC$,O 是 BC 的中点,所以 $PO\perp BC$, ………… 1分

在直角△POC 中,$PC=\sqrt{3}$,$OC=1$,所以 $PO=\sqrt{2}$.

在矩形 $ABCD$ 中,$AB=1$,$BC=2$,所以 $DO=\sqrt{2}$.

又因为 $PD=2$,所以在△POD 中,$PD^2=PO^2+OD^2$,即 $PO\perp OD$, ………… 3分

而 $BC\cap OD=O$,BC,$OD\subset$平面 $ABCD$,所以 $PO\perp$平面 $ABCD$, ………… 4分

而 $PO\subset$平面 PBC,所以平面 $PBC\perp$平面 $ABCD$. ………… 5分

(2)由(1)知,$PO\perp$平面 $ABCD$,取 AD 中点 Q,连接 OQ,易知 OQ,OC,OP 两两相互垂直,

如图,分别以 OQ,OC,OP 为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系,

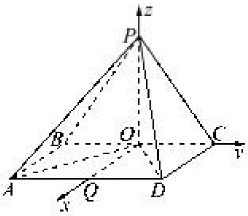
则 $A(1,-1,0)$,$C(0,1,0)$,$D(1,1,0)$,$P(0,0,\sqrt{2})$, ………… 7分

$\overrightarrow{AD}=(0,2,0)$,$\overrightarrow{CD}=(1,0,0)$,$\overrightarrow{CP}=(0,-1,\sqrt{2})$. ………… 8分

设平面 PCD 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CD}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CP}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x=0,\\ -y+\sqrt{2}z=0,\end{cases}$ 令 $z=1$,则 $y=\sqrt{2}$,所以 $\boldsymbol{m}=(0,\sqrt{2},1)$, ………… 10分

所以 $\cos\langle\overrightarrow{AD},\boldsymbol{m}\rangle=\dfrac{|\overrightarrow{AD}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\overrightarrow{AD}|\cdot|\boldsymbol{m}|}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$, ………… 11分



所以直线 AD 与平面 PCD 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. ………… 12分

22.【解析】(1)因为 $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}$, ………… 1分

则 $f(1)=2$,$f'(1)=-2$, ………… 2分

则切线方程为 $y-2=-2\times(x-1)$,即 $2x+y-4=0$, ………… 3分

曲线 $f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $2x+y-4=0$. ………… 4分

(2)若证 $f(x)<\dfrac{1+e^{-2}}{\ln(x+1)}+2$,即证 $f(x)-2=\dfrac{1}{x}-\ln x-1=\dfrac{1-x\ln x-x}{x}<\dfrac{1+e^{-2}}{\ln(x+1)}$. ………… 5分

令 $g(x)=1-x-x\ln x$,$x>0$,则 $g'(x)=-2-\ln x$, ………… 6分

当 $x\in(0,e^{-2})$ 时,$g'(x)>0$,$g(x)$ 单调递增,

当 $x\in(e^{-2},+\infty)$ 时,$g'(x)<0$,$g(x)$ 单调递减,

所以 $g(x)_{\max}=g(e^{-2})=1+e^{-2}$,即 $1-x-x\ln x\leqslant 1+e^{-2}$. ………… 7分

令 $h(x)=\ln(x+1)-x$,$x>0$,则 $h'(x)=\dfrac{1}{x+1}-1=-\dfrac{x}{x+1}<0$,

可知 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减, ………… 8分

所以 $h(x)<h(0)=0$,即当 $x>0$ 时,$0<\ln(x+1)<x$,从而 $0<\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{\ln(x+1)}$, ………… 9分

所以当 $0<x<1$ 时,$1-x-x\ln x>0$,$\dfrac{1-x-x\ln x}{x}\leqslant\dfrac{1+e^{-2}}{x}<\dfrac{1+e^{-2}}{\ln(x+1)}$, ………… 10分

当 $x\geqslant 1$ 时,$1-x-x\ln x\leqslant 0$,$\dfrac{1-x-x\ln x}{x}\leqslant 0<\dfrac{1+e^{-2}}{\ln(x+1)}$, ………… 11分

综上所述,对 $\forall x\in(0,+\infty)$,均有 $f(x)<\dfrac{1+e^{-2}}{\ln(x+1)}+2$. ………… 12分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。