江西省重点中学盟校 2023 届高三第一次联考理科数学试卷答案

1-5 BDCBD　6-10 ACBAC　11-12 BA

12. $f'(x)-g'(x-2)=0\Rightarrow f(x)=g(x-2)+C$，$f(-x)-g(x)=-2\Rightarrow f(x)=g(-x)-2$

联立得：$g(x-2)+C=g(-x)-2$，令 $x=1\Rightarrow C=-2\Rightarrow g(x-2)=g(-x)$，又 $g(x-2)$ 为奇函数得 $g(x-2)=-g(-x-2)$，且 $g(-2)=0$ 联立得：$g(-x)=-g(-x-2)\Rightarrow g(x)=-g(x-2)$ 故 $g(x)$ 周期为 4 且 $g(1)=-g(3),g(2)=-g(4)\Rightarrow g(1)+g(2)+g(3)+g(4)=0$，又因为 $f(x)=g(x-2)-2\Rightarrow\sum_{k=1}^{2023}f(k)=g(-1)+g(0)+g(1)-4046=-g(-2)-4046=-4046$，故选 A

13. $\sqrt{13}$

14. $\left(\frac{\pi}{3},+\infty\right)$

15. $x^2+y^2=\frac{1}{2}$（与 $x+y-1=0$ 相切即可）

16. $\{1,2\}$

令 $f(x)=x^a-\log_a x\Rightarrow f'(x)=ax^{a-1}-\frac{1}{x\ln a}=\frac{ax^a\ln a-1}{x\ln a}$，若 $0<a<1$，则当 $x\to0$ 时，$f(x)\to-\infty$（舍），只需考虑 $a>1$，$y=ax^a\ln a-1$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，易知函数 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 单调递减，$(x_0,+\infty)$ 单调递增，其中 $x_0^a=\frac{1}{a\ln a}$，

$f(x)\geq f(x_0)=x_0^a-\log_a x_0=\frac{1}{a\ln a}-\frac{\ln x_0}{\ln a}=\frac{1-a\ln x_0}{a\ln a}=\frac{1+\ln(a\ln a)}{a\ln a}>0\Rightarrow a\ln a>\frac{1}{e}$，

利用参考数据或引入不等式：$\ln(x+1)>x-\frac{x^2}{2}\Rightarrow\ln\frac{4}{3}>\frac{5}{18}\Rightarrow\frac{4}{3}\ln\frac{4}{3}>\frac{10}{27}>\frac{1}{e}$，又因为 $\ln(x+1)<x\Rightarrow\ln\frac{5}{4}<\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{5}{4}\ln\frac{5}{4}<\frac{5}{16}<\frac{1}{e}$.又 $y=x\ln x$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增，故 n 的取值集合为 $\{1,2\}$

17.【解】（1）因为 $\sqrt{3}\left(\sin^2A+\sin^2B-\sin^2C\right)=2\sin A\sin B\sin C$ 即

$\sqrt{3}\left(a^2+b^2-c^2\right)=2ab\sin C$，所以 $\sqrt{3}\cos C=\sin C$，故 $\tan C=\sqrt{3}$，又 C 为三角形内角，故 $C=\frac{\pi}{3}$.……………5 分

（2）由 $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DA}$ 可得 $\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}=2\left(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CD}\right)$，即 $\overrightarrow{CD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$，

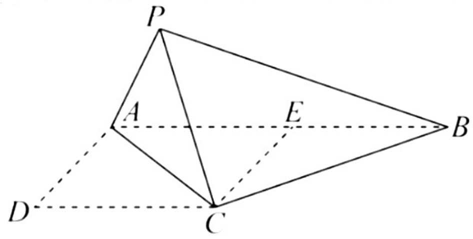
故$\overrightarrow{CD}^2=\frac{1}{9}\overrightarrow{CB}^2+\frac{4}{9}\overrightarrow{CA}^2+\frac{4}{9}\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}$，即$4=\frac{1}{9}a^2+\frac{4}{9}b^2+\frac{4}{9}ab\times\frac{1}{2}$，

整理得到：$36=a^2+4b^2+2ab\geq 4ab+2ab=6ab$，

当且仅当$a=2\sqrt{3},b=\sqrt{3}$时等号成立，故$(ab)_{\max}=6$.

故三角形面积的最大值为$\frac{1}{2}\times6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.……………12 分

18、【解】（Ⅰ）取AB的中点E，连结CE.



$\because AD=DC=\frac{1}{2}AB$，$\therefore AE//DC$，$AE=DC$，

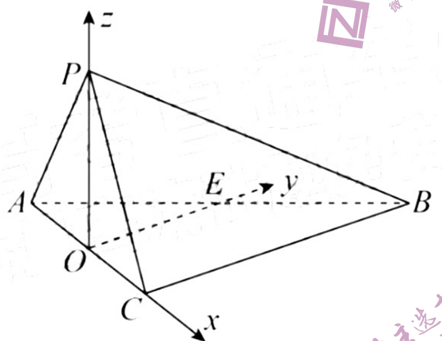
$\therefore$四边形$ADCE$是平行四边形，$\therefore CE=AD$，$\therefore CE=AE=EB$，

$\therefore\angle ACB=90^\circ$，即$CB\perp CA$.

又平面$PAC\perp$平面ACB，且两平面的交线为AC，$\therefore CB\perp$平面PAC，

又$PA\subset$平面PAC，$\therefore CB\perp PA$.…………5 分

（Ⅱ）由$AB=4$知$PA=PC=2$,取AC的中点O，连结OE，则$OE//CB$.



$\therefore OE\perp AC$，且$OP\perp AC$，$\therefore OC$，OE，OP两两互相垂直.

以O为原点，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OE}$，$\overrightarrow{OP}$为x，y，z轴的正方向建立空间直角坐标系.

设$OC=a(a>0)$，则$C(a,0,0)$，$P\left(0,0,\sqrt{4-a^2}\right)$，$A(-a,0,0)$，$B\left(a,2\sqrt{4-a^2},0\right)$，

$\therefore\overrightarrow{AB}=\left(2a,2\sqrt{4-a^2},0\right)\overrightarrow{AP}=\left(a,0,\sqrt{4-a^2}\right)$

易得平面PAC的一个法向量为$\vec{n_1}=(0,1,0)$，

设平面PAB的一个法向量为$\vec{n_2}=(x,y,z)$，

由$\begin{cases}\vec{n_2}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\\vec{n_2}\cdot\overrightarrow{AP}=0\end{cases}$，得$\begin{cases}2ax+2\sqrt{4-a^2}y=0\\ax+\sqrt{4-a^2}z=0\end{cases}$，取$x=\sqrt{4-a^2}$得$y=-a,z=-a$

故$\vec{n_2}=\left(\sqrt{4-a^2},-a,-a\right)$

由$\left|\cos\langle\vec{n_1},\vec{n_2}\rangle\right|=\left|\frac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}|\cdot|\vec{n_2}|}\right|=\frac{a}{\sqrt{4+a^2}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$知$a=\sqrt{3}$

$\therefore\overrightarrow{PC}=\left(\sqrt{3},0,-1\right)\overrightarrow{AB}=\left(2\sqrt{3},2,0\right)$，.

设异面直线 PC 与 AB 所成角为 θ，

则 $\cos\theta=\left|\cos\langle\overrightarrow{PC},\overrightarrow{AB}\rangle\right|=\dfrac{3}{4}$ ∴异面直线 PC 与 AB 所成角的余弦值为 $\dfrac{3}{4}$ ……………12 分

19、（1）根据题意，$\hat{b}=\dfrac{0.53}{0.15}=3.53$，

所以 $\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{t}=7.44-3.53\times0.73=4.86$，

所以 $\hat{y}=3.53t+4.86$，

又 $t=\lg x$，所以 $\hat{y}=3.53\lg x+4.86$，

所以 10 箱药材，$x=1$ 时，$\hat{y}=3.53\lg1+4.86=4.86$（千元），

即该水果 10 箱的成本为 4860 元，

故该水果 10 箱的利润 $5000-4860=140$（元）．……………5 分

(2) (i) $60\times\dfrac{1}{8}+100\times\dfrac{1}{4}+140\times\dfrac{1}{2}+180\times\dfrac{1}{8}=125$

农户每天平均可配送 125 箱药材.……………7 分

(ii)根据频率分布直方图，可知该农户每天可配送的该水果的箱数的概率分布表为：

箱数	$[40,80)$	$[80,120)$	$[120,160)$	$[160,200]$
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$

该运输户购 3 辆车时每天的利润为 Y 元，

则 Y 的可能取值为 1200，600，0，其分布列为：

Y	1200	600	0
P	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

故 $E(Y)=\dfrac{5}{8}\times1200+\dfrac{1}{4}\times600+\dfrac{1}{8}\times0=900$，

此项业务每天的利润平均值为 900 元.……………12 分

20.解：（1） $x^2=2py\Rightarrow y=\dfrac{x^2}{2p}\Rightarrow y'=\dfrac{x}{p}$，直线 $AB\perp y$ 轴时，不妨设 $A(p,\dfrac{p}{2}),B(-p,\dfrac{p}{2})$.

曲线 C 在点 A 处切线 PA 的方程为： $y=x-\dfrac{p}{2}$，同理切线 PB 的方程为： $y=-x-\dfrac{p}{2}$

联立方程得： $P(0,-\dfrac{p}{2})\Rightarrow S_{\triangle ABP}=p^2=4\Rightarrow p=2\Rightarrow x^2=4y$.……………5 分

（2）设直线 AB 方程： $y=kx+1,A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$

联立方程得： $x^2-4kx-4=0\Rightarrow x_1+x_2=4k,x_1x_2=-4\Rightarrow k_{PA}\cdot k_{PB}=\dfrac{x_1x_2}{4}=-1$.

切线 AP 方程： $y=\dfrac{x_1x}{2}-\dfrac{x_1^2}{4}$，切线 BP 方程： $y=\dfrac{x_2x}{2}-\dfrac{x_2^2}{4}$，联立得 $P(2k,-1)$

$k_{PA}\cdot k_{PB}=-1\Rightarrow\angle APB=90^\circ$，又易证 $PF\perp AB$ 又 $\angle PAB=3\angle PBA$，得：$\angle PAB-\angle PBA=45^\circ$

$$\tan(\angle PAB-\angle PBA)=\frac{\tan\angle PAB-\tan\angle PBA}{1+\tan\angle PAB\cdot\tan\angle PBA}=\frac{|PF|(|BF|-|AF|)}{|AF||BF|+|PF|^2}=\frac{(y_2-y_1)\sqrt{4k^2+4}}{(y_1+1)(y_2+1)+4k^2+4}$$

$$=\frac{k(x_2-x_1)\sqrt{4k^2+4}}{k^2x_1x_2+2k(x_1+x_2)+4+4k^2+4}=\frac{k(8k^2+8)}{8k^2+8}=k=1$$

综上所述：直线 AB 方程： $y=x+1$（其它解法酌情给分）……………12 分

21.解：（1） $f'(x)=2(x-a)\ln x+\dfrac{(x-a)^2}{x}=(x-a)(2\ln x-\dfrac{a}{x}+1),a>0,x>0$

令 $g(x)=2\ln x-\dfrac{a}{x}+1$，显然 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，若 $x<\dfrac{1}{\sqrt{e}},g(x)<-1+1=0$

若 $x>e^a,g(x)>(2-\dfrac{1}{e^a})a+1>0$，（或 $x\to0,y\to-\infty,x\to+\infty,y\to+\infty$）故 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$

存在唯一零点 $x_0,2\ln x_0-\dfrac{a}{x_0}+1=0$，$g(a)=2\ln a-\dfrac{a}{a}+1=2\ln a$，$g(1)=1-a$，若 $0<a<1$，

则 $g(a)<0,g(1)>0\Rightarrow0<a<x_0<1$，$f(x)$ 在 $(0,a)$ 单调递增，在 (a,x_0) 单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 单调递增，此时 $f(x)$ 有两个极值点；若 $a=1$，则 $g(a)=0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，此时 $f(x)$ 无极值点；若 $a>1$，则 $g(a)>0,g(1)<0\Rightarrow1<x_0<a$，$f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 单调递增，在 (x_0,a) 单调递减，在 $(a,+\infty)$ 单调递增，此时 $f(x)$ 有两个极值点.

综上所述：当 $0<a<1$ 或 $a>1$ 时，此时 $f(x)$ 有两个极值点.；当 $a=1$ 时，$f(x)$ 无极值点.……………………………………………………………………………………5 分

（2）①当 $a>1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 单调递增，在 (x_0,a) 单调递减，在 $(a,+\infty)$ 单调递增，

当 $x\to 0$ 时， $f(x)\to -\infty$ ， $f(x_0)=(x_0-a)^2\ln x_0$ ， $f(a)=0$ ，当 $x\to +\infty$ ， $f(x)\to +\infty$.

若直线 $y=b$ 与 $y=b+\dfrac{e}{2}$ 与曲线 $y=f(x)$ 共有五个不同的交点，则 $f(x_0)=(x_0-a)^2\ln x_0>\dfrac{e}{2}$

，由 $2\ln x_0-\dfrac{a}{x_0}+1=0\Rightarrow a=2x_0\ln x_0+x_0\Rightarrow f(x_0)=4x_0^{\ 2}\ln^3 x_0>\dfrac{e}{2},x_0>1$ ，

$f'(x_0)=8x_0\ln^3 x_0+4x_0^2\cdot\dfrac{1}{x_0}\cdot 3\ln^2 x_0=4x_0(2\ln x_0+3)\ln^2 x_0>0\Rightarrow$ $f(x_0)=4x_0^{\ 2}\ln^3 x_0$ 在 $x_0>1$

时单调递增，又 $f(\sqrt{e})=4e\ln^3\sqrt{e}=\dfrac{e}{2}\Rightarrow x_0>\sqrt{e}\Rightarrow a=2x_0\ln x_0+x_0>2\sqrt{e}$.…………9 分

②当 $a=1$ 时， $f(x)$ 单调递增，此时直线 $y=b$ 与 $y=b+\dfrac{e}{2}$ 与曲线 $y=f(x)$ 没有五个交点（舍

）

③当 $0<a<1$ 时， $f(x)$ 在 $(0,a)$ 单调递增，在 (a,x_0) 单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 单调递增.

当 $x\to 0$ 时， $f(x)\to -\infty$ ， $f(a)=0$ ， $f(x_0)=(x_0-a)^2\ln x_0$ ，当 $x\to +\infty$ ， $f(x)\to +\infty$.

同理 $f(x_0)=4x_0^{\ 2}\ln^3 x_0<-\dfrac{e}{2},0<x_0<1$ ， $f'(x_0)=4x_0(2\ln x_0+3)\ln^2 x_0>0\Rightarrow x_0>e^{-\frac{3}{2}}$ ，所以

$f(x_0)$ 在 $(0,e^{-\frac{3}{2}})$ 单调递减，在 $(e^{-\frac{3}{2}},1)$ 单调递增， $f(e^{-\frac{3}{2}})=4e^{-3}(-\dfrac{3}{2})^3=-\dfrac{27}{2e^3}>-\dfrac{e}{2}$ ，故不等式

$f(x_0)=4x_0^{\ 2}\ln^3 x_0<-\dfrac{e}{2},0<x_0<1$ 无解.（舍）

综上所述： $a>2\sqrt{e}$ ………………………………………………………………………12 分

22 解(1)若 $t=0$ ，则 $x=0,y=0$ ；若 $t\neq 0$ ，可知 $t=\dfrac{y}{x}$ 代入可得 $x^3+y^3=3xy$

故曲线 C_1 普通方程： $x^3+y^3=3xy$ ……………………………………………………………3 分

化简得 C_1 极坐标方程： $\rho=\dfrac{3\sin\theta\cos\theta}{\sin^3\theta+\cos^3\theta}$ ，曲线 C_2 极坐标方程： $\rho=\dfrac{a}{\sin\theta+\cos\theta},\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

……………………………………………………………………5 分

（2）曲线 C_1 普通方程： $x^3+y^3=3xy\Rightarrow\rho^3\cos^3\theta+\rho^3\sin^3\theta=3\rho^2\sin\theta\cos\theta$

若 C_1 与 C_2 有公共点，则 $a=\dfrac{3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)}{\sin^3\theta+\cos^3\theta}=\dfrac{3\sin\theta\cos\theta}{1-\sin\theta\cos\theta}=-3+\dfrac{6}{2-\sin 2\theta}$ ，又

$\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\sin 2\theta\in(0,1]\Rightarrow a\in(0,3]$ ………………………………………………………10 分