2023年南通市高二学年度质量监测

数学参考答案与评分建议

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{x|x^2-2x-3<0\}$，$B=\{x|0<x<4\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{x|-1<x<4\}$　B. $\{x|-3<x<1\}$　C. $\{x|0<x<3\}$　D. $\{x|0<x<1\}$

【答案】C

2. 已知 $(1-\mathrm{i})z=1+\mathrm{i}$，则 $|z|=$

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　B. 1　C. $\sqrt{2}$　D. 2

【答案】B

3. 从5件不同的礼物中选出3件分别送给3名同学，则不同的送法共有

A. 240种　B. 125种　C. 120种　D. 60种

【答案】D

4. 若一组数据 $1,1,a,4,5,5,6,7$ 的25百分位数是2，则 $a=$

A. 1　B. 2　C. 3　D. 4

【答案】C

5. 已知 P 是△ABC 所在平面外一点，M 是 BC 的中点，若 $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{PA}+y\overrightarrow{PB}+z\overrightarrow{PC}$，则

A. $x+y+z=0$　B. $x+y+z=1$　C. $x-y-z=1$　D. $x-y-z=-1$

【答案】A

6. 若 $3^a=b^3=2$，则

A. $b<a<2$　B. $b<2<a$　C. $a<2<b$　D. $a<b<2$

【答案】D

7. 已知圆台的上、下底面半径分别为1和2，用一个平行于底面的平面去截圆台，截得上下两部分的体积之比为$14:13$，则截面半径为

A. $\frac{5}{3}$　　B. $\frac{7}{4}$　　C. $\frac{40}{27}$　　D. $\frac{41}{27}$

【答案】A

8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x|x-2|, x\geqslant 0,\\ ax, \quad x<0,\end{cases}$ 若函数 $g(x)=f(x)-f(-x)$ 有五个零点，则实数 a 的取值范围是

A. $(-\infty,2)$　　B. $(0,2)$　　C. $(-\infty,-2)$　　D. $(-2,0)$

【答案】D

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知 $(x-2)^6=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+a_6x^6$，则

A. $a_0=1$　　B. $a_4=60$

C. $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=-63$　　D. $a_0+a_2+a_4+a_6=\frac{3^6-1}{2}$

【答案】BC

10. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，则

A. 平面 AB_1C // 平面 DA_1C_1　　B. $BD_1\perp$ 平面 AB_1C

C. A_1D 与 AC 所成角为60°　　D. BD_1 与平面 BCC_1B_1 所成角为45°

【答案】ABC

11. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，$f(x+2)=-f(x)$，当$0<x\leqslant 1$时，$f(x)=x$，则

A. $f(-3)=f(-1)$　　B. $f(-\frac{1}{2})=f(\frac{5}{2})$

C. $f(7)<f(8)$　　D. $f(x)\geqslant f(3)$

【答案】BCD

12. 某农业种植基地在三块实验地种植同一品种的苹果，甲地块产出苹果中一级果个数占75%，乙地块产出苹果中一级果个数占60%，丙地块产出苹果中一级果个数占80%. 已知甲、乙、丙地块产出的苹果个数之比为$2:5:3$，现将三个地块产出的苹果混放一堆，则下列说法正确的是

A．任取一个苹果是甲地块产出的概率为 0.2

B．任取一个苹果是甲地块产出的一级果的概率为 0.75

C．任取一个苹果是一级果的概率为 0.69

D．如果取到的一个苹果是一级果，则其是由甲地块产出的概率为 $\frac{5}{23}$

【答案】ACD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13． 如果随机变量 $X \sim N(2,\sigma^2)$，且 $P(X \leqslant 0)=0.2$，则 $P(X \leqslant 4)=$_________.

【答案】0.8

14． 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,-2)$，$\boldsymbol{b}=(m,1)$，若 $\boldsymbol{a} \perp (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，则实数 $m=$_________.

【答案】-3

15． 已知正四棱锥的底面边长和侧棱长分别为 4 和 $2\sqrt{5}$，其所有面都与同一个球相切，则该球的表面积为_________.

【答案】$\frac{16}{3}\pi$

16． 已知直线 l 与曲线 $y=e^{x-2}$ 和 $y=\ln x$ 都相切，请写出符合条件的两条直线 l 的方程：_________，_________.（对一空得 2 分，对两空得 5 分）

【答案】$y=x-1$，$y=\frac{1}{e}x$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（10 分）

有 8 个相同的小球，上面分别标有数字 1，2，3，4，5，6，7，8，“从中任取一个小球，球的数字是奇数”记为事件 A，“从中任取一个小球，球的数字是 3 的倍数”记为事件 B.

（1）试判断 A,B 是否为相互独立事件，并说明理由；

（2）求 $P(A+B)$.

【解】（1）解法一：$\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，

$A=\{1,3,5,7\}$，$B=\{3,6\}$.　　　　……2 分

若 A 发生，则 B 发生的概率为 $\frac{1}{4}$；

若 A 不发生，则 B 发生的概率为 $\frac{1}{4}$； ……4 分

可见，事件 A 发生与否不影响事件 B 发生的概率，

因此，A, B 为相互独立事件. ……5分

解法二：$\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，

$A=\{1,3,5,7\}$，$B=\{3,6\}$，$AB=\{3\}$. ……2分

所以 $P(A)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$，$P(B)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$，$P(AB)=\frac{1}{8}$，

即 $P(AB)=P(A)P(B)$. ……4分

因此，A, B 为相互独立事件. ……5 分

（2）解法一：由概率性质得

$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ ……7分

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}$

$=\frac{5}{8}$. ……10分

解法二：$\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，

$A=\{1,3,5,7\}$，$B=\{3,6\}$，$A+B=\{1,3,5,6,7\}$. ……7分

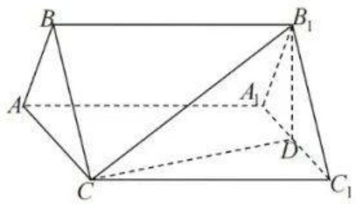
所以 $P(A+B)=\frac{5}{8}$. ……10分

18.（12 分）

如图，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D 为 A_1C_1 的中点.

（1）求证：$CD\perp B_1D$；

（2）若 $AA_1=2, AB=\sqrt{2}$，求点 B 到平面 B_1CD 的距离.



【解】（1）在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，

$CC_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$，

因为 $B_1D\subset$ 平面 $A_1B_1C_1$，所以 $CC_1\perp B_1D$； ……2分

在正三角形 $A_1B_1C_1$ 中，$A_1B_1=B_1C_1$，D 为 A_1C_1 中点，

所以 $A_1C_1\perp B_1D$； ……4分

又因为 $CC_1\cap A_1C_1=C_1$，$CC_1, A_1C_1\subset$ 平面 ACC_1A_1，

所以 $B_1D\perp$ 平面 ACC_1A_1；

因为$CD \subset$平面ACC_1A_1，

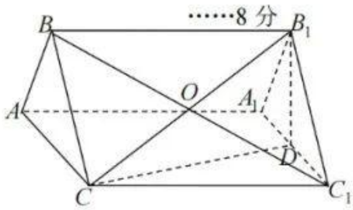
所以$CD \perp B_1D$.　　　　……6分

（2）连接BC_1，交B_1C于点O，

在正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，侧面BCC_1B_1为平行四边形，

所以O为BC_1的中点，

所以B到平面B_1CD的距离等于C_1到平面B_1CD的距离；　　　　……8分



设C_1到平面B_1CD的距离为d，

因为$AA_1=2, AB=\sqrt{2}$，所以正三角形$A_1B_1C_1$的边长为$\sqrt{2}$，

所以$B_1D=\frac{\sqrt{6}}{2}$，$\triangle B_1DC_1$的面积为$\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{6}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$，

所以三棱锥$C-B_1C_1D$的体积$V=\frac{1}{3}S_{\triangle B_1DC_1}\cdot CC_1=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2=\frac{\sqrt{3}}{6}$.　　　　……10分

又$V_{C-B_1C_1D}=V_{C_1-B_1CD}$，

在$Rt\triangle CDB_1$中，$B_1D=\frac{\sqrt{6}}{2}, CD=\sqrt{CC_1^2+C_1D^2}=\sqrt{2^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，

所以$S_{\triangle CDB_1}=\frac{1}{2}B_1D\cdot CD=\frac{3\sqrt{3}}{4}$，

所以$V_{C_1-B_1CD}=\frac{1}{3}S_{\triangle CDB_1}\cdot d=\frac{\sqrt{3}}{4}d$，

从而$\frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{4}d$，即$d=\frac{2}{3}$.

所以点B到平面B_1CD的距离为$\frac{2}{3}$.　　　　……12分

19.（12分）

已知函数$f(x)=4^x+m\cdot 2^x$，$m\in\mathbf{R}$.

（1）若$m=-3$，解关于x的不等式$f(x)>4$；

（2）若函数$y=f(x)+f(-x)$的最小值为-4，求m的值.

【解】（1）$m=-3$时，由$f(x)=4^x-3\times 2^x>4$得，

$4^x-3\times 2^x-4>0$，$(2^x+1)(2^x-4)>0$，　　　　……2分

因为$2^x+1>0$，所以$2^x-4>0$，解得$x>2$，

所以原不等式的解集为$(2,+\infty)$. ……5 分

（2）因为

$y=f(x)+f(-x)=(4^x+4^{-x})+m\cdot(2^x+2^{-x})$

$=(2^x+2^{-x})^2+m\cdot(2^x+2^{-x})-2$，

令$t=2^x+2^{-x}$，因为$2^x>0$，

所以$t=2^x+2^{-x}\geqslant 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}=2$，（当且仅当$x=0$时取得等号）

则$y=g(t)=t^2+m\cdot t-2=(t+\frac{m}{2})^2-\frac{m^2}{4}-2$， ……7 分

① 当$-\frac{m}{2}\leqslant 2$，即$m\geqslant -4$时，$g(t)$在$[2,+\infty)$上单调递增，

当$t=2$，即$x=0$时，$y_{\min}=2m+2$，

所以$2m+2=-4$，解得$m=-3$，符合题意； ……9 分

② 当$-\frac{m}{2}>2$，即$m<-4$时，

$g(t)$在$\left[2,-\frac{m}{2}\right]$上单调递减，在$\left[-\frac{m}{2},+\infty\right)$上单调递增，

当$t=-\frac{m}{2}$，$y_{\min}=-\frac{m^2}{4}-2$，

所以$-\frac{m^2}{4}-2=-4$，解得$m=\pm 2\sqrt{2}$，不合题意，舍去.

综上，m的值为-3. ……12 分

20.（12 分）

“使用动物做医学实验是正确的，这样做能够挽救人的生命”.一机构为了解成年人对这种说法的态度（态度分为同意和不同意），在某市随机调查了200位成年人，得到如下数据：

	男性	女性	合计
同意	70	50	120
不同意	30	50	80
合计	100	100	200

（1）能否有99%的把握认为成年人对该说法的态度与性别有关?

（2）将频率视为概率，用样本估计总体.若从该市成年人中，随机抽取3人了解其对该

说法的态度，记抽取的 3 人中持同意的人数为 X，求 X 的分布列和数学期望.

附：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，

$P(\chi^2\geqslant x_0)$	0.025	0.010	0.005
x_0	5.024	6.635	7.879

【解】（1）提出假设 H_0：成年人对该问题的态度与性别无关.

根据列联表中的数据可以求得

$$\chi^2=\frac{200\times(70\times50-50\times30)^2}{120\times80\times100\times100}$$ ……2 分

$$=\frac{25}{3}\approx8.333\ .$$ ……3 分

因为当 H_0 成立时，$\chi^2\geqslant6.635$ 的概率约为 0.01，

这里 $\chi^2\approx8.333>6.635$，

所以我们有 99% 的把握认为，对该问题的态度与性别有关. ……5 分

（2）从该市成年人中随机抽取 1 人持同意态度的概率为 $\dfrac{70+50}{200}=\dfrac{3}{5}$， ……6 分

由题意，$X\sim B(3,\dfrac{3}{5})$，

$P(x=0)=C_3^0\left(1-\dfrac{3}{5}\right)^3=\dfrac{8}{125}$，

$P(x=1)=C_3^1\times\dfrac{3}{5}\times\left(1-\dfrac{3}{5}\right)^2=\dfrac{36}{125}$，

$P(x=2)=C_3^2\times\left(\dfrac{3}{5}\right)^2\times\left(1-\dfrac{3}{5}\right)=\dfrac{54}{125}$，

$P(x=3)=C_3^3\times\left(\dfrac{3}{5}\right)^3=\dfrac{27}{125}$， ……10 分

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{8}{125}$	$\dfrac{36}{125}$	$\dfrac{54}{125}$	$\dfrac{27}{125}$

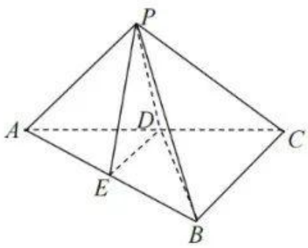
因此，随机变量 X 的数学期望为

解法一：$E(X)=0\times\dfrac{8}{125}+1\times\dfrac{36}{125}+2\times\dfrac{54}{125}+3\times\dfrac{27}{125}=\dfrac{9}{5}$. ……12 分

解法二：$E(X)=np=3\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{9}{5}$.

21.（12 分）

如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$AC\perp BC$，D 是 AC 的中点，E 是 AB 上一点，$AC\perp$ 平面 PDE.



（1）证明：$DE//$ 平面 PBC；

（2）若 $AC=BC=4$，$PD=PE=2$，求二面角 $D-PB-E$ 的正弦值.

【解】（1）证明：因为 $AC\perp$ 平面 PDE，$DE\subset$ 平面 PDE，

所以 $AC\perp DE$，

因为 $AC\perp BC$，且直线 AC，BC，$DE\subset$ 平面 ABC，

所以 $DE//BC$， ……3 分

因为 $DE\not\subset$ 平面 PBC，$BC\subset$ 平面 PBC，

所以 $DE//$ 平面 PBC； ……5 分

（2）取 DE 的中点 O，连结 PO，过点 O 作 $OF\perp DE$ 交 BC 于点 F，

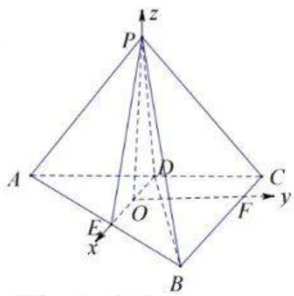
因为 $PD=PE$，所以 $PO\perp DE$，

因为 $AC\perp$ 平面 PDE，$PO\subset$ 平面 PDE，

所以 $AC\perp PO$，因为 $DE\cap AC=D$，

所以 $PO\perp$ 平面 ABC，所以 $PO\perp OF$. ……6 分

如图，以 $\left\{\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OF},\overrightarrow{OP}\right\}$ 为正交基底建立空间直角坐标系，



因为 D 是 AC 的中点，$AC=BC=4$，

所以 $O(0,0,0)$，$B(3,2,0)$，$E(1,0,0)$，$D(-1,0,0)$，

因为 $PD=PE=2$，所以 $PO=\sqrt{3}$，即 $P(0,0,\sqrt{3})$，

所以 $\overrightarrow{DB}=(4,2,0)$，$\overrightarrow{DP}=(1,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{EP}=(-1,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{EB}=(2,2,0)$；

设平面 PBD 的一个法向量 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DB}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DP}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}4x_1+2y_1=0,\\ x_1+\sqrt{3}z_1=0,\end{cases}$

令 $x_1=\sqrt{3}$，得 $y_1=-2\sqrt{3}$， $z_1=-1$，

所以平面 PBD 的一个法向量 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},-2\sqrt{3},-1)$， ……8 分

设平面 PBE 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EP}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x_2+2y_2=0,\\ -x_2+\sqrt{3}z_2=0,\end{cases}$

令 $x_2=\sqrt{3}$，得 $y_2=-\sqrt{3}$， $z_2=1$，

所以平面 PBE 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},-\sqrt{3},1)$， ……10 分

所以

$$\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{3}+(-2\sqrt{3})\times(-\sqrt{3})-1}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-2\sqrt{3})^2+(-1)^2}\times\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-\sqrt{3})^2+1}}=\frac{8}{4\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{7}}{7},$$

设二面角 $D-PB-E$ 为 θ， $\theta\in[0,\pi]$，

所以 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>}=\frac{\sqrt{21}}{7}$，

所以二面角 $D-PB-E$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$. ……12 分

22.（12 分）

已知函数 $f(x)=\frac{1-ax}{e^x}, a\in\mathbf{R}$.

（1）当 $a=1$ 时，求函数 $f(x)$ 的极值；

（2）当 $x\geqslant 0$ 时， $f(x)\geqslant 1-2x$ ，求 a 的取值范围.

【解】（1） $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，

当 $a=1$ 时， $f(x)=\frac{1-x}{e^x}$，

$f'(x)=\frac{-e^x-(1-x)e^x}{(e^x)^2}=\frac{x-2}{e^x}$， ……2 分

令 $f'(x)=\frac{x-2}{e^x}=0$，解得 $x=2$，

x	$(-\infty,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	极小值	↗

所以 $f(x)$ 的极小值 $f(2)=-\dfrac{1}{e^2}$； ……4 分

（2）当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant 1-2x$ 等价于当 $x\geqslant 0$ 时，$(2x-1)e^x-ax+1\geqslant 0$，

令 $g(x)=(2x-1)e^x-ax+1\,(x\geqslant 0)$，则 $g(x)\geqslant 0$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立，

所以 $g'(x)=(2x+1)e^x-a$，

令 $h(x)=(2x+1)e^x-a\,(x\geqslant 0)$，

所以 $h'(x)=(2x+3)e^x$，

因为 $x\geqslant 0$，所以 $h'(x)=(2x+3)e^x>0$，

所以 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $h(x)_{\min}=h(0)=1-a$， ……6 分

①当 $1-a\geqslant 0$，即 $a\leqslant 1$ 时，$h(x)\geqslant h(0)\geqslant 0$，

所以 $g'(x)\geqslant 0$，即 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $g(x)\geqslant g(0)=0$，

所以当 $a\leqslant 1$ 时，$g(x)\geqslant 0$； ……8 分

②当 $1-a<0$，即 $a>1$ 时，

$h(0)=1-a<0$，

又 $h(a)=(2a+1)e^a-a=a(2e^a-1)+e^a$，

因为 $a>1$，所以 $e^a>e$，所以 $h(a)>0$， ……10 分

因为 $h(0)\cdot h(a)<0$，且 $h(x)$ 图象在 $[0,+\infty)$ 上连续不间断，

所以存在 $x_0\in(0,a)$，使得 $h(x_0)=0$，

因为当$0<x<x_0$时，$h(x)<0$，即$g'(x)<0$，

所以$g(x)$在$(0,x_0)$上单调递减，

所以$g(x_0)<g(0)=0$，这与$g(x)\geqslant 0$在$[0,+\infty)$上恒成立矛盾，

所以$a>1$不合题意，舍去；

综上所述，a的取值范围是$(-\infty,1]$.　　　　……12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。