

天津市南仓中学 2022 至 2023 学年度第一学期
高三年级期末（数学 学科）

本试卷分为第 I 卷（选择题）和第 II 卷两部分，共 150 分，考试用时 120 分钟。第 I 卷 1 至 1 页，第 II 卷 2 至 2 页。

答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号填写在答题纸上。答卷时，考生务必将答案涂写在答题纸上，答在试卷上的无效。

祝各位考生考试顺利！

第 I 卷

注意事项：

1. 每小题选出答案后，用铅笔将机读卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。

2. 本卷共 9 小题，共 45 分。

一、选择题（每小题 5 分，共 45 分）

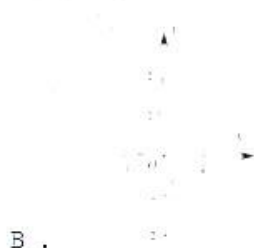
1. 已知 $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x \leq 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, 则 $A \cup B = (\quad)$

A. $\{2, 4\}$ B. $\{x \mid 2 \leq x \leq 5\}$ C. $\{x \mid 2 \leq x \leq 6\}$ D. $\{2, 3, 4, 5, 6\}$

2. “设 $x \in \mathbb{R}$, 则 $|x-1| > 2$ ”是“ $x^2 > 1$ ”的 $(\quad)$

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

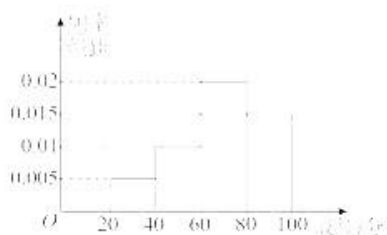
3. 已知函数 $f(x) = x^2 - \cos x - \ln|x|$, 则 $f(x)$ 的大致图像正确的是 $(\quad)$



4. 已知 $a = \left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$, $b = 2^{\frac{3}{2}}$, $c = \left(\frac{1}{3}\right)^{\log \frac{4}{9}}$, 则 a, b, c 的大小关系为 $(\quad)$

A. $a < b < c$ B. $a < c < b$ C. $c < a < b$ D. $c < b < a$

5. 某班组织奥运知识竞赛，将参加竞赛的学生成绩整理得下边的频率分布直方图，若低于 60 分的有 9 人，则该班参加竞赛的学生人数是 $(\quad)$



- A. 27 B. 30 C. 45 D. 60

6. 若所有棱长都是 3 的直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的六个顶点都在同一球面上, 则该球的表面积是 ()

- A. 12π B. 18π C. 21π D. 39π

7. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左顶点与抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点的距离为 4, 过双曲线的右顶点且与渐近线平行的直线与抛物线的准线的交点坐标 $(-2, 2)$, 则双曲线的焦距为 ()

- A. $\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{3}$ C. $\sqrt{5}$ D. $2\sqrt{5}$

8. 已知函数 $f(x) = (\sqrt{3} \sin x + \cos x) \cos x$. 给出下列结论:

① $f(x)$ 的最小正周期为 2π ;

② $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 是 $f(x)$ 的最大值;

③ 把函数 $y = \sin 2x$ 的图象上所有点向左平行移动 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度后, 再向上平移 $\frac{1}{2}$ 个单位长度, 可得到 $f(x)$ 的图象. 其中所有正确结论的序号是 ()

- A. ① B. ①② C. ②③ D. ①②③

9. 定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(2-x) = f(2+x)$, 且当 $x \in [0, 2]$ 时,

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 4x + 4, & 1 < x \leq 2 \end{cases}, \text{ 若关于 } x \text{ 的不等式 } m|x| \leq f(x) \text{ 的整数解有且仅有 7 个,}$$

则实数 m 的取值范围为 ()

- A. $\left[\frac{e-1}{5}, \frac{e-1}{3}\right]$ B. $\left[\frac{e-1}{5}, \frac{e-1}{3}\right]$ C. $\left[\frac{e-1}{7}, \frac{e-1}{5}\right]$ D. $\left[\frac{e-1}{7}, \frac{e-1}{5}\right]$

第 II 卷

注意事项:

1. 用黑色墨水的钢笔或签字笔将答案写在答题纸上。

2. 本卷共 11 小题, 共 105 分。

二、填空题 (每小题 5 分, 共 30 分)

10. 若复数 z 满足 $z(1-i) = 1+2i$ (i 为虚数单位), 则复数 z 的虚部是_____。

11. 在 $\left(\frac{\sqrt{2}}{x} - x^2\right)$ 的展开式中, 常数项为_____。

12. 已知直线 $x - \sqrt{3}y + 8 = 0$ 和圆 $x^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$ 相交于 A, B 两点. 若 $|AB| = 6$, 则 r 的值为_____.

13. 某学校实行自主招生, 参加自主招生的学生从 8 道试题中随机挑选 4 道进行作答, 至少答对 3 道才能通过初试. 记在这 8 道试题中甲能答对 6 道, 甲答对试题的个数为 X , 则甲通过自主招生初试的概率为_____, $E(X) =$ _____.

14. 已知 $x > 0, y > 0, \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$, 则 $\frac{x^2y + y^2 + 36}{xy}$ 的最小值是_____.

15. 在四边形 $ABCD$ 中, 已知 $AD \parallel BC, \angle DAB = 60^\circ, AD = 2BC = 2, AB = \frac{3}{2}$. 点 E 是线段 AD 上的点, 且 $\overrightarrow{AE} = \lambda \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{BD} = \frac{3}{4}$, 则 $\lambda =$ _____. 若 F 是线段 CD 上的动点, 则 $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{BF}$ 的最小值为_____.

三、解答题。

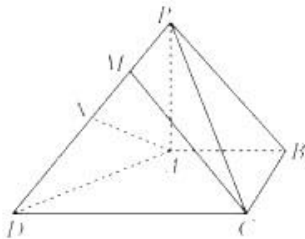
16. (本小题 14 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 已知 $\sin A = \sqrt{3} \sin C, B = 150^\circ, \triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$.

(1) 求 a 的值;

(2) 求 $\sin A$ 的值;

(3) 求 $\sin\left(2A + \frac{\pi}{6}\right)$ 的值.

17. (本小题 15 分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 面 $ABCD, AB \parallel CD$, 且 $CD = 2, AB = 1, BC = 2\sqrt{2}, PA = 1, AB \perp BC, N$ 为 PD 的中点.



(1) 求证: $AN \parallel$ 平面 PBC ;

(2) 求平面 PAD 与平面 PBC 夹角的余弦值;

(3) 已知线段 PD 上存在一点 M , 使得 $\frac{DM}{DP} = \frac{1}{4}$, 求直线 CM 与平面 PBC 所成角的正弦值.

18. (本小题 15 分) 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, $2a_2, a_4, 4a_5$ 成等差数列, 且满足 $a_4 = 4a_5^2$, 等差数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n , $b_2 + b_4 = 6, S_4 = 10$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $c_n = \begin{cases} b_n & (n \text{ 为奇数}) \\ a_n \cdot b_n & (n \text{ 为偶数}) \end{cases}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和.

(3) 设 $d_n = \frac{b_{2n-1}}{b_{2n-1}b_{2n-3}} a_n, n \in \mathbf{N}^*$, $\{d_n\}$ 的前 n 项和 T_n , 求证: $T_n < \frac{1}{3}$.

19. (本小题 15 分) 设 F_1, F_2 分别为椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点, 点 $P \left(1, \frac{3}{2} \right)$

在椭圆 E 上, 且点 P 和 F_1 关于点 $C \left(0, \frac{3}{4} \right)$ 对称.

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 过点 F_2 的直线 l 交椭圆 E 于 A, B 两点, 过点 P 且平行于 AB 的直线与椭圆交于另一点 Q , 问是否存在直线 l , 使得四边形 $PA B Q$ 为平行四边形? 若存在, 求出 l 的方程; 若不存在, 说明理由.

20. (本小题 16 分) 已知函数 $f(x) = x^2 - 2x + a \ln x (a > 0)$

(1) 当 $a = 2$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 当 $a = 1$ 时, 若关于 x 的方程 $f(x) = x + b$ 有唯一实数解, 试求实数 b 的取值范围;

(3) 若函数 $f(x)$ 有两个极值点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 且不等式 $f(x_1) \geq m x_2$ 恒成立, 试求实数 m 的取值范围.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线