巴蜀中学2023届高考适应性月考卷（五）

数学参考答案

一、单项选择题（本大题共8小题，每小题5分，共40分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	D	A	C	B	A	D	D

【解析】

1．$B=\{x\mid x^2-4x-12>0\}=\{x\mid x<-2$ 或 $x>6\}$，如图1，白色区域为 $A\cup B=\{x\mid x<-2$ 或 $x>2\}$，则阴影部分表示的集合为 $\complement_{\mathbf{R}}(A\cup B)=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 2\}$，故选B.

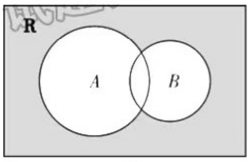

图1

2．由求根公式可知，$z_{1,\,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$，所以 z_1，z_2 在复平面内对应的点分别为 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，关于 x 轴对称，故选D.

3．因为 $h(x)=-x^2+f(3x)$ 是奇函数，所以有 $h(-1)+h(1)=0$，代入有 $-1+f(-3)-1+f(3)=0$，所以 $f(-3)=4$，故选A.

4．因为圆台下底面的半径为5，球的半径为5，所以圆台下底面圆的圆心与球心重合，底面圆的半径为 $R=5$，画出轴截面如图2所示，设圆台上底面圆的半径 r，则 $r=4$，所以球心 O 到上底面圆的距离 $h=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$，即圆台的高为3，所以母线长 $l=\sqrt{3^2+(5-4)^2}=\sqrt{10}$，所以 $S_{侧}=\pi(r+R)l=9\sqrt{10}\pi$，故选C.

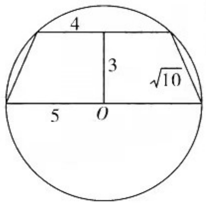

图2

5．设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，由题 $\dfrac{a_2}{a_1}=3$，所以 $a_2=3a_1$，即 $a_1+d=3a_1$，所以 $d=2a_1$，所以 $a_n=a_1+(n-1)d=(2n-1)a_1$，又因为 $\{b_n\}$ 为公比为3的等比数列，所以 $b_5=a_1\times3^4=81a_1=a_m=(2m-1)a_1$，解得 $m=41$，故选B.

令 $\varphi(k)=\frac{1}{k}-\ln k-1$，$k>1$，

$\therefore \varphi'(k)=-\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k}<0$，$\varphi(k)$ 在 $k\in(1,+\infty)$ 上单调递减，$\therefore \varphi(k)<\varphi(1)=0$.

又 $a=\varphi(k)$，$\therefore a<0$. ……………………………………………………（5 分）

（2）由题意，$\frac{1}{x_0}-\ln x_0-a-1=0$，且 $(1-x_1)\ln x_1-ax_1=0$，

消去 a 即得：$(1-x_1)\ln x_1-x_1\left(\frac{1}{x_0}-\ln x_0-1\right)=0$， ……………………………（6 分）

注意到：$f(1)=-a>0$，且 $x_1<x_0$，则：$0<x_1<1<x_0$.

令 $u(x)=\ln x-x+1$，$u'(x)=\frac{1}{x}-1$，

所以当 $x\in(0,1)$ 时，$u'(x)>0$，$u(x)$ 单调递增；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$u'(x)<0$，$u(x)$ 单调递减. ……………………………（8 分）

故 $u(x)\leqslant u(x)_{\max}=u(1)=0$，

即得：当 $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ 时，恒有 $\ln x<x-1$ 成立.

$\therefore (1-x_1)\ln x_1<(1-x_1)(x_1-1)$，且 $x_1\left(\frac{1}{x_0}-\ln x_0-1\right)>x_1\left[\frac{1}{x_0}-(x_0-1)-1\right]=x_1\left(\frac{1}{x_0}-x_0\right)$，

即 $(1-x_1)(x_1-1)>(1-x_1)\ln x_1=x_1\left(\frac{1}{x_0}-\ln x_0-1\right)>x_1\left(\frac{1}{x_0}-x_0\right)$，

$\therefore x_0-x_1>\frac{1}{x_0}+\frac{1}{x_1}-2$， ……………………………………………（10 分）

$\therefore 2x_0+x_1=(x_0-x_1)+x_0+2x_1>x_0+\frac{1}{x_0}+2x_1+\frac{1}{x_1}-2$

$>2\sqrt{x_0\cdot\frac{1}{x_0}}+2\sqrt{2x_1\cdot\frac{1}{x_1}}-2=2\sqrt{2}$，即证. ……………………………（12分）

6．原式 $=4\sin20^\circ+\dfrac{\sin20^\circ}{\cos20^\circ}=\dfrac{4\sin20^\circ\cos20^\circ+\sin20^\circ}{\cos20^\circ}=\dfrac{2\sin40^\circ+\sin20^\circ}{\cos20^\circ}=$

$\dfrac{2\sin(60^\circ-20^\circ)+\sin20^\circ}{\cos20^\circ}=\dfrac{\sqrt3\cos20^\circ}{\cos20^\circ}=\sqrt3$，故选 A.

7．如图 3 所示，设 $P(x_0,\ y_0)(x_0>0,\ y_0>0)$，$M(x_1,\ y_1)$，$N(x_2,\ y_2)$．直线 l 与圆 O 相离，则 $d>r=\sqrt2$，$|m|>\sqrt{10}$ 且 $m<0$，于是直线 MN 的方程为 $x_0x+y_0y=2$，分别令 $x=0,\ y=0$，则 $x_R=\dfrac{2}{x_0}$，$y_T=\dfrac{2}{y_0}$，又 $2x_0+y_0=-m$，$\triangle ORT$ 的面积 $S=\dfrac12\cdot\dfrac{2}{x_0}\cdot\dfrac{2}{y_0}=\dfrac{4}{2x_0y_0}\geqslant\dfrac{4}{\left(\dfrac{2x_0+y_0}{2}\right)^2}=\dfrac{16}{m^2}$

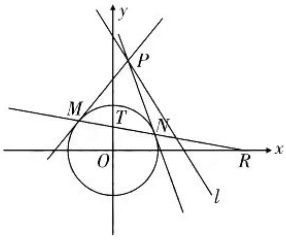

图 3

$=\dfrac{16}{25}$，当且仅当 $2x_0=y_0$ 时取等号，则 $m=-5$，故选 D.

8．构造函数 $f(x)=x-\ln x(x>0)$，则 $f'(x)=1-\dfrac1x=\dfrac{x-1}{x}$，当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，故 $f(x)$ 在 $0<x<1$ 上单调递减，在 $x>1$ 上单调递增，由 $m=\ln\dfrac{m}{2}+2$，$m-\ln m=2-\ln2$，即 $f(m)=f(2)$，同理 $f(p)=f(3)$，因为 $3>2$，$f(x)$ 在 $x>1$ 上单调递增，所以 $f(3)>f(2)$，故 $f(p)>f(m)$，因为 $f(x)$ 在 $0<x<1$ 上单调递减，m，$p\in(0,\ 1)$，故 $p<m$．因为 $n=\ln n-\ln2+3>\ln n-\ln3+3$，故 $n-\ln n>3-\ln3$，即 $f(n)>f(3)=f(p)$，因为 $f(x)$ 在 $0<x<1$ 上单调递减，n，$p\in(0,\ 1)$，故 $n<p$，从而 $n<p<m$，故选 D.

二、多项选择题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项是符合题目要求的，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分）

题号	9	10	11	12
答案	CD	ABD	ACD	BCD

【解析】

9．点 $(2,\ 2)$ 在渐近线上或者在双曲线上．当 $(2,\ 2)$ 在渐近线上时，$\dfrac ba=1$，此时 $e=\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}=\sqrt2$，故 C 正确；当 $(2,\ 2)$ 在双曲线上时，$4-\dfrac{4}{b^2}=1$，解得 $b^2=\dfrac43$，此时 $e=\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}=\dfrac{\sqrt{21}}{3}$，故 D 正确，故选 CD.

10．A 选项，如图 4，根据 CD，$\angle BCD$，$\angle BDC$，可利用正弦定理求得 CB，从而求得 AB，故 A 正确；B 选项，根据 CD，$\angle ACD$，$\angle ADC$，利用正弦定理可求得 AC，从而求得 AB，故 B 正确；C 选项，根据 CD，$\angle ACB$，$\angle BCD$，$\angle ACD$ 四个条件，无法通过解三角形求得 AB，故 C 错误；D 选项，由 $\angle ACB$，$\angle BCD$ 借助直角三角形和余弦定理，用 AB 表示出 CB，BD，AC，AD，然后结合 CD，$\angle ADC$ 在三角形 ADC 中利用余弦定理列方程，解方程求得 AB，故 D 正确，故选 ABD.

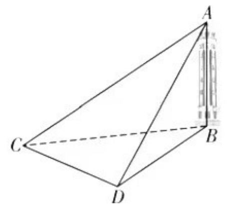

图 4

11．对于选项 A：$\overline{\omega}=\frac{1}{m+n}(x_1+x_2+\cdots+x_m+y_1+y_2+\cdots+y_n)=\frac{1}{m+n}(m\overline{x}+n\overline{y})=\frac{m}{m+n}\overline{x}+\frac{n}{m+n}\overline{y}$，故 A 正确；对于选项 BC：总样本方差应该是总样本数据与总样本平均数之差的平方和，再除以总样本容量，故 B 错误，C 正确；对于选项 D：

$$s^2=\frac{1}{m+n}[(x_1-\overline{\omega})^2+(x_2-\overline{\omega})^2+\cdots+(x_m-\overline{\omega})^2+(y_1-\overline{\omega})^2+(y_2-\overline{\omega})^2+\cdots+(y_n-\overline{\omega})^2]$$

$$=\frac{1}{m+n}[(x_1-\overline{x}+\overline{x}-\overline{\omega})^2+\cdots+(x_m-\overline{x}+\overline{x}-\overline{\omega})^2+(y_1-\overline{y}+\overline{y}-\overline{\omega})^2+\cdots+(y_n-\overline{y}+\overline{y}-\overline{\omega})^2]$$

$$=\frac{1}{m+n}\{(x_1-\overline{x})^2+\cdots+(x_m-\overline{x})^2+2[(x_1-\overline{x})+\cdots+(x_m-\overline{x})](\overline{x}-\overline{\omega})+m(\overline{x}-\overline{\omega})^2+(y_1-\overline{y})^2$$

$$+\cdots+(y_n-\overline{y})^2+2[(y_1-\overline{y})+\cdots+(y_n-\overline{y})](\overline{y}-\overline{\omega})+n(\overline{y}-\overline{\omega})^2\}=\frac{1}{m+n}[ms_1^2+m(\overline{x}-\overline{\omega})^2$$

$$+ns_2^2+n(\overline{y}-\overline{\omega})^2]=\frac{m}{m+n}[s_1^2+(\overline{x}-\overline{\omega})^2]+\frac{n}{m+n}[s_2^2+(\overline{y}-\overline{\omega})^2]$$，故 D 正确，故选 ACD.

12．对于 A 选项，由于四边形 $ABED$ 不存在外接圆，因此四棱锥 C_1-ABED 不存在外接球，故 A 错误；对于 B 选项，如图 5 所示：H 为 BE 的中点，连接 AH，CH，C_1H，由 $EC_1=BC_1$，H 为 BE 的中点，$\therefore C_1H\perp BE$，假设存在某个位置的 C_1，使得 $BE\perp AC_1$，则由 $C_1H\subset$ 平面 C_1HA，$AC_1\subset$ 平面 C_1HA，$C_1H\cap AC_1=C_1$，有 $BE\perp$ 平面 C_1HA，$AH\subset$ 平面 C_1HA，有 $BE\perp AH$，而 $AE\neq AB$，$BE\perp AH$ 显然不成立，故 B 正确；对于 C 选项，二面角 C_1-BE-A 为 $120°$ 时，二面角 C_1-BE-C 为 $60°$，即 $\angle C_1HC=60°$，$C_1H=\frac{\sqrt{2}}{2}$，则 C_1 到

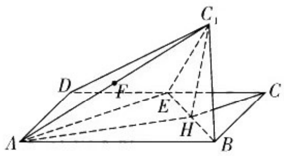

图 5

平面 $ABCD$ 的距离为 $h_{C_1}=\frac{\sqrt{6}}{4}$，设点 A 到平面 C_1BE 的距离为 h_A，由 $V_{C_1-ABE}=V_{A-C_1BE}$，有 $\frac{1}{3}S_{\triangle ABE}h_{C_1}=\frac{1}{3}S_{\triangle C_1BE}h_A$，$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}}{4}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times1\cdot h_A$，解得 $h_A=\frac{\sqrt{6}}{2}$，点 F 到平面 C_1BE 的距离是点 A 到平面 C_1BE 距离的一半，则点 F 到平面 C_1BE 的距离为 $\frac{\sqrt{6}}{4}$，故 C 正确；对于 D 选项，当四棱锥 C_1-ABED 的体积最大时，平面 $C_1BE\perp$ 平面 $ABED$，平面 $C_1BE\cap$ 平面 $ABED=BE$，$C_1H\perp BE$，$\angle AEB=90°$，$AE\perp BE$，有 $C_1H\perp$ 平面 $ABED$，$AE\perp$ 平面 C_1BE，$AE=\sqrt{2}$，$C_1H=EH=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$AH=\frac{\sqrt{10}}{2}$，$AC_1=\sqrt{3}$，以 AC_1 为直径的球以 F 为球心，半径 $FC_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 球面与被平面 C_1BE 截得的交线是过 C_1 的圆，设圆心为 O，如图 6 所示．$AE\perp$ 平面 C_1BE，点 A 到平面 C_1BE 的距离 $AE=\sqrt{2}$，F 为 AC_1 的中点，

∴球心 F 到平面 C_1BE 的距离 $FO=\frac{\sqrt{2}}{2}$，截面圆的半径 $OC_1=\sqrt{FC_1^2-FO^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}$，圆的周长（即交线长）为 π，故 D 正确，故选 BCD.

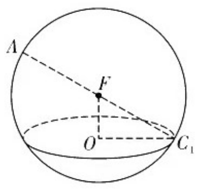

图 6

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

题号	13	14	15	16
答案	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2}{9}$	2	$\frac{2\sqrt{6}}{3}$；$x=\frac{2\sqrt{2}-1}{2}p$

【解析】

13．因为 $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=\sqrt{2}$，$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{2}$，所以 $\vec{a}^2+\vec{b}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=2$，所以 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-2$，设 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的夹角为 θ，则由平面向量数量积的定义可得 $\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{-2}{\sqrt{2}\times2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，因为 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$，所以 $\theta=\frac{3\pi}{4}$.

14．$n=3\times3\times3=27$，$m=\mathrm{A}_3^3=6$，$P=\dfrac{m}{n}=\dfrac{2}{9}$．

15．当 $x>a$ 时，$f(x)=2^x-3$，是增函数，当 $-1<x\leqslant a$ 时，$f(x)=\log_2(x+1)$，也是增函数．由题意即存在实数 t，使得方程 $f(x)=-t$ 有两个不相等的根，即函数 $f(x)$ 图象与直线 $y=-t$ 有两个交点，所以当点 $P(a,\ \log_2(a+1))$ 在点 $Q(a,\ 2^a-3)$ 上方时，如图 7 所示，符合题意，所以

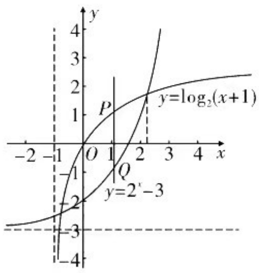

图 7

$\log_2(2+1)>2^2-3=1$，$\log_2(3+1)<2^3-3$，结合 $y=2^x-3$ 与 $y=\log_2(x+1)$ 的图象可得正整数 $a=1$ 或 2，所以 a 的最大值为 2．

16．设 $M(x_1,\ y_1)$，$N(x_2,\ y_2)$，$F\left(\dfrac{p}{2},\ 0\right)$，$|OM|=|ON|$，所以 M，N 两点关于 x 轴对称，则 $M(x_1,\ y_1)$，$N(x_1,\ -y_1)$．若△OMN 的重心为 F，由重心坐标公式有 $\dfrac{y_1+y_2+0}{3}=0$，$\dfrac{x_1+x_2+0}{3}=\dfrac{p}{2}$，又 M 在第一象限，则有 $x_1=x_2=\dfrac{3}{4}p$，代入抛物线方程有 $M\left(\dfrac{3}{4}p,\ \dfrac{\sqrt{6}}{2}p\right)$，则 OM 的斜率为 $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$；若△OMN 的内心为 F，则 MF 平分角 $\angle OMN$，记 MN 与 x 轴的交点为 T，由角平分线定理有 $\dfrac{|MO|}{|MT|}=\dfrac{|OF|}{|FT|}$，即 $\dfrac{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}{y_1}=\dfrac{\frac{p}{2}}{x_1-\frac{p}{2}}$，化简得 $4x_1^2+4px_1-7p^2=0$，解得：$x_1=\dfrac{-1\pm2\sqrt{2}}{2}p$，舍去负值，所以直线 MN 的方程为 $x=\dfrac{2\sqrt{2}-1}{2}p$．

四、**解答题**（共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17．（本小题满分 10 分）

解：（1）对于③，$\dfrac{b+c}{a}=\dfrac{a+c}{b-c}\Rightarrow\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=-\dfrac{1}{2}$，$\therefore B=\dfrac{2\pi}{3}$；　………………（2 分）

对于④，$\dfrac{1+\cos(B-C)}{2}-\sin B\sin C=\dfrac{1}{4}\Rightarrow\cos(B-C)-2\sin B\sin C=-\dfrac{1}{2}$，

即 $\cos(B+C)=-\dfrac{1}{2}$，且 $A+B+C=\pi$，$0<A,\ B,\ C<\pi$，则 $A=\dfrac{\pi}{3}$，　……………（4 分）

故③，④不能同时存在，则满足有解三角形的序号组合为①②③，①②④.

…………………………………………………………（5分）

（2）选①②③：$a=\sqrt{3}$，$b=2$，$B=\frac{2\pi}{3}$时，

由余弦定理：$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\Rightarrow-\frac{1}{2}=\frac{3+c^2-4}{2\sqrt{3}c}$， …………………………（7分）

整理得：$c^2+\sqrt{3}c-1=0$ 且 $c>0$，则 $c=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}$， ……………………………（9分）

∴△ABC 的面积为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{3(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{8}$. ……………………………（10分）

选①②④：$a=\sqrt{3}$，$b=2$，$A=\frac{\pi}{3}$时，

由余弦定理：$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{4+c^2-3}{4c}$， …………………………（7分）

整理得：$c^2-2c+1=0$，则 $c=1$， …………………………………………………（9分）

∴△ABC 的面积 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$. ……………………………………（10分）

18.（本小题满分12分）

解：（1）由表中数据，$\bar{t}=\frac{1+2+3+4+5}{5}=3$，$\bar{y}=\frac{17+19+23+26+30}{5}=23$，

…………………………………………………………（2分）

$\sum_{i=1}^{5}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})=33$，$\sum_{i=1}^{5}(t_i-\bar{t})^2=10$，

$\therefore\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{5}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{5}(t_i-\bar{t})^2}=\frac{33}{10}=3.3$， ……………………………………………（4分）

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{t}=23-3\times3.3=13.1$， ………………………………………………（6分）

∴y关于t的线性回归方程 $\hat{y}=3.3t+13.1$. ………………………………………（8分）

（2）2024年的年份代号为8，即 $t=8$，

则将 $t=8$ 代入线性回归方程得：$y=3.3\times8+13.1=39.5$（千个），

预测2024年该省新能源汽车充电桩的数量为39.5千个，即39500个.

…………………………………………………………（12分）

19.（本小题满分 12 分）

（1）证明：如图 8，因为底面 $ABCD$ 是平行四边形，$\angle BCD=60°$，

$AB=1$，$BC=4$，且 M 是 BC 的中点，

所以 $CD=1$，$CM=2$，$\angle BCD=60°$，

在 $\triangle CDM$ 中，由余弦定理得 $DM=\sqrt{3}$，则 $CD^2+DM^2=CM^2$，

所以 $CD\perp DM$，……………………………（2 分）

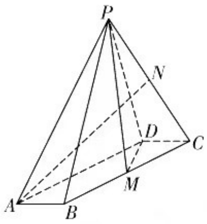

图 8

又 $PD\perp DC$，且 $PD\cap DM=D$，

$PD\subset$ 平面 PDM，$PM\subset$ 平面 PDM，

所以 $CD\perp$ 平面 PDM，则 $PM\perp CD$，……………………………………………（4 分）

又 $PM\perp MD$，$CD\cap MD=D$，CD，$MD\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $PM\perp$ 平面 $ABCD$．……………………………………………………（6 分）

（2）解：连接 AM，则 $PM\perp AM$，

又 $AB=1$，$BM=2$，$\angle ABM=120°$，在 $\triangle ABM$ 中，由余弦定理得 $AM=\sqrt{7}$，

且 $PA=\sqrt{11}$，$PM\perp AM$，则 $PM=2$，

由（1）知 $CD\perp MD$，过 M 作 $ME/\!/CD$ 交 AD 于 E，则 $ME\perp MD$．

故可以以 M 为坐标原点，MD，ME，MP 分别为 x，y，z 轴，

建立如图 9 所示的空间直角坐标系，……………………………（8 分）

则 $A(-\sqrt{3},\ 2,\ 0)$，$P(0,\ 0,\ 2)$，$C(\sqrt{3},\ -1,\ 0)$，$D(\sqrt{3},\ 0,\ 0)$，

$\overrightarrow{PD}=(\sqrt{3},\ 0,\ -2)$，$\overrightarrow{DC}=(0,\ -1,\ 0)$，

所以 $N\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{1}{2},\ 1\right)$，$\overrightarrow{AN}=\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{5}{2},\ 1\right)$，

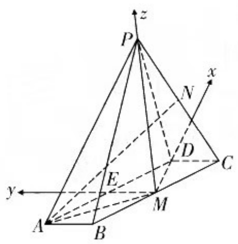

图 9

设平面 PCD 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,\ y,\ z)$，

所以 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PD}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DC}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{3}x=2z\\ y=0\end{cases}\Rightarrow\vec{n}=(2,\ 0,\ \sqrt{3})$，

设直线 AN 与平面 PCD 所成的角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\vec{n},\ \overrightarrow{AN}\rangle|=\dfrac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AN}|}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{AN}|}=\dfrac{2\sqrt{6}}{7}$．……………………………（12 分）

20.（本小题满分 12 分）

（1）证明：因为 $a_{n+1}=2a_n+2^{n+2}-n^2+2n+1$，

则 $\dfrac{a_{n+1}-(n+1)^2}{2^{n+1}}-\dfrac{a_n-n^2}{2^n}=\dfrac{2a_n+2^{n+2}-n^2+2n+1-(n+1)^2}{2^{n+1}}-\dfrac{a_n-n^2}{2^n}$

$=\dfrac{2a_n+2^{n+2}-2n^2-2(a_n-n^2)}{2^{n+1}}=2$， ……………………………………………………（3 分）

所以数列 $\left\{\dfrac{a_n-n^2}{2^n}\right\}$ 是以 $\dfrac{a_1-1}{2}=1$ 为首项，$d=2$ 为公差的等差数列.

……………………………………………………………………（4 分）

（2）解：由（1）知，$\dfrac{a_n-n^2}{2^n}=2n-1$，即 $a_n=2^n(2n-1)+n^2$，

所以 $b_n=\left[\dfrac{a_n}{2^n}\right]=\left[\dfrac{2^n(2n-1)+n^2}{2^n}\right]=\left[(2n-1)+\dfrac{n^2}{2^n}\right]=2n-1+\left[\dfrac{n^2}{2^n}\right]$. ……………（7 分）

令函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，所以 $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，

当 $x\in(0,\ \mathrm{e})$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

当 $x\in(\mathrm{e},\ +\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减.

注意到：$5^2<2^5$，两边同时取对数 $\ln 5^2<\ln 2^5$，即 $\dfrac{\ln 5}{5}<\dfrac{\ln 2}{2}$，

所以当 $x\geqslant 5$ 时，$\dfrac{\ln x}{x}<\dfrac{\ln 2}{2}$，即 $x^2<2^x$， ……………………………………（8 分）

特别地，$n=1$ 时，$\left[\dfrac{n^2}{2^n}\right]=\left[\dfrac{1}{2}\right]=0$；

当 $n=2$ 时，$\left[\dfrac{n^2}{2^n}\right]=\left[\dfrac{4}{4}\right]=1$；

当 $n=3$ 时，$\left[\dfrac{n^2}{2^n}\right]=\left[\dfrac{9}{8}\right]=1$；

当 $n=4$ 时，$\left[\dfrac{n^2}{2^n}\right]=\left[\dfrac{16}{16}\right]=1$；

当 $n\geqslant 5$ 时，$n^2<2^n$，则 $\left[\dfrac{n^2}{2^n}\right]=0$. ……………………………………（10 分）

显然使得 $b_1+b_2+\cdots+b_n\leqslant 100$ 成立的最大正整数 n 的值大于 5，

则 $n\geqslant 5$ 时，$b_1+b_2+\cdots+b_n=1+3+5+\cdots+(2n-1)+3=n^2+3\leqslant 100$，

所以满足条件的 n 的最大值为 9. ……………………………………（12 分）

21．（本小题满分 12 分）

解：（1）离心率 $e^2=1+\dfrac{b^2}{a^2}=5$，所以 $\dfrac{b^2}{a^2}=4$，由于 $\triangle PF_1F_2$ 是直角三角形，

……………………………………………………………………（1 分）

且 $||PF_1|-|PF_2||=2a$，$S_{\triangle PF_1F_2}=\dfrac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|=4$，$c^2=a^2+b^2$，

则 $|PF_1|^2+|PF_2|^2=|F_1F_2|^2$，

即：$(|PF_1|-|PF_2|)^2+2|PF_1|\cdot|PF_2|=|F_1F_2|^2\Rightarrow 4a^2+16=4c^2$，

所以 $b^2=4$，$a^2=1$， ……………………………………………………（4 分）

故双曲线 C 的方程为：$x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$. ……………………………………（5 分）

（2）设 $T(x_0,\ y_0)$，$A_1(-1,\ 0)$，$A_2(1,\ 0)$，

则直线 TA_1 的方程为：$y=\dfrac{y_0}{x_0+1}(x+1)$，令 $x=\dfrac{1}{2}$，

解得 $y=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{y_0}{x_0+1}$，即 $Q_1\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{y_0}{x_0+1}\right)$，

直线 TA_2 的方程为：$y=\dfrac{y_0}{x_0-1}(x-1)$，令 $x=\dfrac{1}{2}$，

解得 $y=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{y_0}{x_0-1}$，即 $Q_2\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{y_0}{x_0-1}\right)$. ……………………………………7 分

设以 Q_1Q_2 为直径的圆上任意一点为 $M(x,\ y)$，故有：$\overrightarrow{Q_1M}\cdot\overrightarrow{Q_2M}=0$，

代入坐标，则以 Q_1Q_2 为直径的圆的方程为 $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{y_0}{x_0+1}\right)\left(y+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{y_0}{x_0-1}\right)=0$，

……………………………………………………………………（9 分）

注意到：上式对任意的点 $T(x_0,\ y_0)$ 恒成立，

由对称性可令 $y=0$，则 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\bullet\frac{y_0^2}{x_0^2-1}=0$，

由于T在双曲线C上，则 $x_0^2-\frac{y_0^2}{4}=1$，即 $\frac{y_0^2}{x_0^2-1}=4$，代入上式，解得 $x=\frac{1}{2}\pm\sqrt{3}$，

所以，以 Q_1Q_2 为直径的圆必过定点 $\left(\frac{1}{2}-\sqrt{3},\ 0\right)$ 和 $\left(\frac{1}{2}+\sqrt{3},\ 0\right)$.

……………………………………………………………………（12 分）

22.（本小题满分 12 分）

证明：（1）解法一：令 $(1-x)\ln x-ax=0$，则 $a=\frac{(1-x)\ln x}{x}$，

令 $g(x)=\frac{(1-x)\ln x}{x}(x>0)$，$\therefore g'(x)=\frac{1-x-\ln x}{x^2}$，

注意到：$g'(1)=0$，函数 $h(x)=1-x-\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

所以当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)>0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，

故 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，所以 $g(x)$ 的最大值为 $g(1)=0$.

由题意，$f(x)$ 有两个零点，必有 $a<g(x)_{\max}$，即 $a<0$. ………………………（5 分）

解法二：$\because f(x)=(1-x)\ln x-ax$，$x>0$，

$\therefore f'(x)=\frac{1}{x}-\ln x-a-1$，$f''(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}<0$，

$\therefore f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

当 $x\to+\infty$，$f'(x)\to-\infty$；当 $x\to0+$，$f'(x)\to+\infty$，

（另解：取 $x=e^{-a-1}$，$f'(e^{-a-1})=\frac{1}{e^{-a-1}}>0$；

取 $x=e^{a^2-a+1}$，$f'(e^{a^2-a+1})=e^{-a^2+a-1}-a^2-2=e^{-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}}-a^2-2<1-a^2-2<0$）

$\therefore\exists k\in(0,+\infty)$，使得 $f'(k)=0$，即 $\frac{1}{k}-\ln k-a-1=0$，$a=\frac{1}{k}-\ln k-1$，

则 $f(x)$ 在 $(0,k)$ 上单调递增，在 $(k,+\infty)$ 上单调递减.

$\therefore f(x)_{\max}=f(k)=(1-k)\ln k-ak=(1-k)\ln k-k\left(\frac{1}{k}-\ln k-1\right)=\ln k+k-1>0$，

$\therefore k>1$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。