高三数学试卷参考答案(文科)

1. A　因为 $A=\{x|-4\leqslant x<6\}$，$B=\{x|3\leqslant x<7\}$，所以 $A\cup B=\{x|-4\leqslant x<7\}$.

2. D　$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}$.

3. C　因为 $2p=68$，所以 $p=34$，所以抛物线 $y^2=-68x$ 的准线方程为 $x=17$.

4. A　$1-7+7^2-7^3+\cdots+(-7)^{2n}=\dfrac{1-(-7)^{2n}\times(-7)}{1-(-7)}=\dfrac{1-(-7)^{2n+1}}{8}$.

5. C　由 $f(x)=\log_2 x-\log_4(x+20)=0$，得 $\log_4 x^2=\log_4(x+20)(x>0)$，则 $x^2=x+20$，解得 $x=5$ 或 $x=-4$，又 $x>0$，所以 $x=5$.

6. D　$i=1,2=2$；$i=2,2^2=4<2\times2^2=8$；$i=3,2^3=8<2\times3^2=18$；$i=4,2^4=16<2\times4^2=32$；$i=5,2^5=32<2\times5^2=50$；$i=6,2^6=64<2\times6^2=72$；$i=7,2^7=128>2\times7^2=98$. 故输出 i 的值为 7.

7. B　设该正四棱柱的底面边长为 a，高为 h，则球 O 的直径为 $\sqrt{a^2+a^2+h^2}=\sqrt{3+3+10}=4$，故球 O 的体积为 $\dfrac{4\pi}{3}\times(\dfrac{4}{2})^3=\dfrac{32\pi}{3}$.

8. A　因为 $\tan\theta=\tan(\theta+\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{-\dfrac{5}{3}-1}{1+(-\dfrac{5}{3})}=4$，

所以 $\sqrt{\dfrac{1+2\sin 2\theta+3\cos^2\theta}{1-2\sin 2\theta+3\cos^2\theta}}=\sqrt{\dfrac{\sin^2\theta+4\sin\theta\cos\theta+4\cos^2\theta}{\sin^2\theta-4\sin\theta\cos\theta+4\cos^2\theta}}=|\dfrac{\sin\theta+2\cos\theta}{\sin\theta-2\cos\theta}|=|\dfrac{\tan\theta+2}{\tan\theta-2}|=3$.

9. D　因为 $a^{10}=2^3=8$，$b^{10}=3^2=9$，所以 $b>a>1$，而 $c=\log_{0.2}0.3<\log_{0.2}0.2=1$，故 $b>a>c$.

10. B　因为 $y'=3x^2+2ax$，所以当 $x=1$ 时，$y'=2a+3$. 若曲线 $y=x^3+ax^2$ 在点 $(1,a+1)$ 处的切线的倾斜角大于 45°，则 $2a+3>1$ 或 $2a+3<0$，解得 $a>-1$ 或 $a<-\dfrac{3}{2}$. 由几何概型可知曲线 $y=x^3+ax^2$ 在点 $(1,a+1)$ 处的切线的倾斜角大于 45° 的概率为 $\dfrac{-\dfrac{3}{2}-(-2)+5-(-1)}{5-(-2)}=\dfrac{13}{14}$.

11. B　因为 $x\in(\pi,\dfrac{19\pi}{18})$，所以 $6x+\dfrac{\pi}{3}+6\varphi\in(6\pi+\dfrac{\pi}{3}+6\varphi,6\pi+\dfrac{2\pi}{3}+6\varphi)$.

因为 $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\dfrac{\pi}{3}+6\varphi\in(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{10\pi}{3})$，$\dfrac{2\pi}{3}+6\varphi\in(\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{11\pi}{3})$，

又 $f(x)$ 在 $(\pi,\dfrac{19\pi}{18})$ 上单调，所以 $\dfrac{\pi}{2}\leqslant\dfrac{\pi}{3}+6\varphi<\dfrac{2\pi}{3}+6\varphi\leqslant\dfrac{3\pi}{2}$ 或 $\dfrac{3\pi}{2}\leqslant\dfrac{\pi}{3}+6\varphi<\dfrac{2\pi}{3}+6\varphi\leqslant\dfrac{5\pi}{2}$ 或 $\dfrac{5\pi}{2}\leqslant\dfrac{\pi}{3}+6\varphi<\dfrac{2\pi}{3}+6\varphi\leqslant\dfrac{7\pi}{2}$，所以 φ 的取值范围是 $[\dfrac{\pi}{36},\dfrac{5\pi}{36}]\cup[\dfrac{7\pi}{36},\dfrac{11\pi}{36}]\cup[\dfrac{13\pi}{36},\dfrac{17\pi}{36}]$.

12. D　不妨设 $|PQ|=3k$，$|PF_2|=4k(k>0)$，因为 P 在以 F_1F_2 为直径的圆上，所以 $PF_1\perp PF_2$，即 $PQ\perp PF_2$，则 $|QF_2|=5k$. 因为 Q 在 C 的左支上，所以 $|QF_2|+|PF_2|-|PQ|=|QF_2|-|QF_1|+|PF_2|-|PF_1|=6k=4a$，得 $2a=3k$，则 $|PF_1|=|PF_2|-2a=k$. 因为 $PF_1\perp PF_2$，所以 $|F_1F_2|=2c=\sqrt{17}k$，故 $e=\dfrac{2c}{2a}=\dfrac{\sqrt{17}}{3}$.

13. 7　$(1+3i)(1+2i^3)=(1+3i)(1-2i)=7+i$.

14. $6\sqrt{2}\pi$　该圆柱的侧面积为 $2\pi\times\sqrt{2}\times3=6\sqrt{2}\pi$.

15. $[-11,11]$　作出约束条件表示的可行域(图略)，当直线 $z=x-2y$ 经过点 $(3,-4)$ 时，z 取得最大值，且最大值为 11，当直线 $z=x-2y$ 经过点 $(-3,4)$ 时，z 取得最小值，且最小值为 -11. 故 $z=x-2y$ 的取值范围为 $[-11,11]$.

16. 52　被 3 除余 1 且被 4 除余 2 的正整数按照从小到大的顺序排列，构成首项为 10，公差为 $3\times4=12$ 的等差

数列，则 $a_n=10+12(n-1)=12n-2$，$S_n=\frac{(10+12n-2)n}{2}=6n^2+4n$，从而 $\frac{S_n+96}{n}=\frac{6n^2+4n+96}{n}=6n+\frac{96}{n}+4\geqslant 2\sqrt{6n\cdot\frac{96}{n}}+4=52$，当且仅当 $6n=\frac{96}{n}$，即 $n=4$ 时，等号成立，故 $\frac{S_n+96}{n}$ 的最小值为 52.

17. 解：(1)由正弦定理得 $\sin A\sin^2 C+\sin A(1-\cos C)^2=\sin A$，…… 2 分

又由 $0<A<\pi$，可得 $\sin A>0$，所以 $\sin^2 C+(1-\cos C)^2=1$，…… 3 分

即 $2-2\cos C=1$，解得 $\cos C=\frac{1}{2}$，…… 5 分

因为 $0<C<\pi$，所以 $C=\frac{\pi}{3}$. …… 6 分

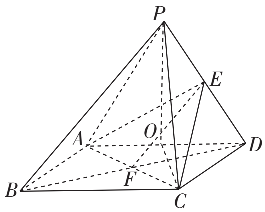
(2)由(1)及余弦定理有 $c^2=a^2+b^2-ab$. …… 7 分

因为 c 是 a，b 的等比中项，所以 $c^2=ab$，代入上式有 $a^2+b^2-ab=ab$，解得 $a=b$，…… 9 分

又 $c^2=ab$，所以 $a=b=c$，$3c=6$，可得 $c=2$，…… 10 分

故△ABC 外接圆的半径为 $\frac{c}{2\sin C}=\frac{2}{2\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. …… 12 分

18. (1)证明：连接 BD 交 AC 于点 F，连接 FE. …… 1 分



因为底面 $ABCD$ 是菱形，所以 F 是 BD 的中点，…… 2 分

又 E 是 PD 的中点，所以 $EF/\!/PB$，…… 3 分

因为 $EF\subset$ 平面 EAC，$PB\not\subset$ 平面 EAC，

所以 $PB/\!/$ 平面 EAC. …… 4 分

(2)解：取 AD 的中点 O，连接 PO，则 $PO\perp AD$. …… 5 分

因为平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，且平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，所以 $PO\perp$ 平面 $ABCD$. …… 6 分

设 $PD=a$，则 $V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2\times 2\times\sqrt{a^2-1}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$，得 $a=3$. …… 8 分

连接 CO，因为底面 $ABCD$ 是菱形，$\angle ABC=60°$，所以 $OC\perp AD$，且 $OC=\sqrt{3}$. …… 9 分

因为 $PO=2\sqrt{2}$，$PO\perp OC$，所以 $PC=\sqrt{11}$，…… 10 分

又 $CD=AB=2$，所以由余弦定理可得 $\cos\angle PCD=\frac{PC^2+CD^2-PD^2}{2PC\cdot CD}=\frac{3\sqrt{11}}{22}$. …… 12 分

19. 解：(1)$\overline{X}=9$，$\overline{Y}=\frac{22+m}{4}$. …… 2 分

因为 $\overline{Y}=\hat{b}\overline{X}+20.6$，所以 $\frac{22+m}{4}=9\hat{b}+20.6$，…… 3 分

又 $m-\hat{b}=11.4$，所以 $\hat{b}=-1.4$，$m=10$. …… 4 分

当加工量为 1.1 万件，即 $X=11$ 时，$\hat{Y}=-1.4\times 11+20.6=5.2$，…… 6 分

故可估计该公司需要给该加工工厂的加工费为 $5.2\times 1.1=5.72$ 万元. …… 7 分

(2)$\sum\limits_{i=1}^{4}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=(-3)\times 4+(-1)\times 2+1\times(-2)+3\times(-4)=-28$，…… 9 分

$$r=\frac{\sum\limits_{i=1}^{4}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{4}(x_i-\overline{x})^2\sum\limits_{i=1}^{4}(y_i-\overline{y})^2}}=\frac{-28}{\sqrt{9+1+1+9}\times\sqrt{16+4+4+16}}=-\frac{7\sqrt{2}}{10}.$$ …… 11 分

因为 $\left|-\frac{7\sqrt{2}}{10}\right|>0.9$，所以 Y 与 X 高度线性相关. …… 12 分

20. (1)解：当 $a=-2$ 时，$f'(x)=\ln x-1$. …… 1 分

令 $f'(x)<0$，得 $0<x<\mathrm{e}$，令 $f'(x)>0$，得 $x>\mathrm{e}$，…… 3 分

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0,\mathrm{e})$，单调递增区间为 $(\mathrm{e},+\infty)$. …… 5 分

(2)证明：$f'(x)=\ln x+(a+1)$，

令 $f'(x)=0$,得 $x=e^{-a-1}$.因为 $a<-1$,所以 $e^{-a-1}>e^0=1$. …………………………………………… 6 分

当 $x\in(1,e^{-a-1})$时,$f'(x)<0$,$f(x)$在$(1,e^{-a-1})$上单调递减;

当 $x\in(e^{-a-1},+\infty)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$在$(e^{-a-1},+\infty)$上单调递增. ………………………… 7 分

而 $f(e^{-a-1})<f(1)=0$, …………………………………………………………………… 8 分

且 $f(e^{-a})=e^{-a}\ln e^{-a}+a(e^{-a}-1)=-a>0$. ………………………………………………… 9 分

又因为 $f(x)$在$(e^{-a-1},+\infty)$上单调递增,

所以 $f(x)$在$(e^{-a-1},+\infty)$上有唯一零点. …………………………………………………… 10 分

当 $x\in(1,e^{-a-1})$时,恒有 $f(x)<f(1)=0$,$f(x)$无零点. ………………………………………… 11 分

综上,当 $a<-1$ 时,$f(x)$在$(1,+\infty)$上存在唯一零点. …………………………………………… 12 分

21.解:(1)设 C 的半焦距为 c,由$|AF|=2-\sqrt{3}$,$|BF|=2+\sqrt{3}$,

可得 $a-c=2-\sqrt{3}$,$a+c=2+\sqrt{3}$,则 $a=2$,$c=\sqrt{3}$, ……………………………………… 2 分

因为 $b^2=a^2-c^2=1$, …………………………………………………………………… 3 分

所以 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ………………………………………………………………… 4 分

(2)由题意知,直线 l 的斜率不为 0,

则不妨设直线 l 的方程为 $x=my+t(t\neq 2)$. ……………………………………………………… 5 分

联立$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1,\\ x=my+t,\end{cases}$消去 x 得$(m^2+4)y^2+2mty+t^2-4=0$,

$\Delta=4m^2t^2-4(m^2+4)(t^2-4)>0$,化简整理得 $m^2+4>t^2$.

设 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,则 $y_1+y_2=\frac{-2mt}{m^2+4}$,$y_1y_2=\frac{t^2-4}{m^2+4}$. ……………………………… 7 分

因为 $BM\perp BN$,所以$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BN}=0$.

因为 $B(2,0)$,所以$\overrightarrow{BM}=(x_1-2,y_1)$,$\overrightarrow{BN}=(x_2-2,y_2)$,

得$(x_1-2)(x_2-2)+y_1y_2=0$,

将 $x_1=my_1+t$,$x_2=my_2+t$ 代入上式,

得$(m^2+1)y_1y_2+m(t-2)(y_1+y_2)+(t-2)^2=0$,

得$(m^2+1)\cdot\frac{t^2-4}{m^2+4}+m(t-2)\cdot\frac{-2mt}{m^2+4}+(t-2)^2=0$,

解得 $t=\frac{6}{5}$ 或 $t=2$(舍去). ………………………………………………………………… 9 分

所以直线 l 的方程为 $x=my+\frac{6}{5}$,则直线 l 恒过点 $Q(\frac{6}{5},0)$,

所以 $S_{\triangle BMN}=\frac{1}{2}|BQ|\cdot|y_1-y_2|=\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{8}{25}\sqrt{\frac{25(m^2+4)-36}{(m^2+4)^2}}$.

设 $p=\frac{1}{m^2+4}$,则 $0<p\leqslant\frac{1}{4}$,$S_{\triangle BMN}=\frac{8}{25}\sqrt{-36p^2+25p}$, ………………………… 10 分

易知 $y=\frac{8}{25}\sqrt{-36p^2+25p}$在$(0,\frac{1}{4}]$上单调递增,

所以当 $p=\frac{1}{4}$时,$S_{\triangle BMN}$取得最大值$\frac{16}{25}$. ……………………………………………… 11 分

又 $S_{\triangle BMN}=\frac{1}{2}|BM|\cdot|BN|$,

所以$(|BM|\cdot|BN|)_{\max}=2(S_{\triangle BMN})_{\max}=\frac{32}{25}$. ……………………………………………… 12 分

22.解:(1)由$\begin{cases}x=t+\frac{1}{t},\\ y=t-\frac{1}{t}\end{cases}$($t$ 为参数),得 $x^2-y^2=4$,

故曲线 C 的普通方程为$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$. ………………………………………………………… 2 分

由 $\rho\cos\theta-2\rho\sin\theta+2=0$,得 $x-2y+2=0$,

故直线 l 的直角坐标方程为 $x-2y+2=0$. ………………………………………………………… 4 分

(2)由题意可知直线 l 的参数方程为$\begin{cases}x=\frac{2\sqrt{5}}{5}t,\\y=1+\frac{\sqrt{5}}{5}t\end{cases}$($t$ 为参数). ………………………………………… 5 分

将直线 l 的参数方程代入曲线 C 的普通方程并整理得 $3t^2-2\sqrt{5}t-25=0$, ……………………… 6 分

设 A,B 对应的参数分别是 t_1,t_2,

则 $t_1+t_2=\frac{2\sqrt{5}}{3}$,$t_1t_2=-\frac{25}{3}$, ………………………………………………………… 7 分

从而$|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\sqrt{\frac{20}{9}+\frac{100}{3}}=\sqrt{\frac{320}{9}}=\frac{8\sqrt{5}}{3}$, ……………………………… 8 分

故$\frac{1}{|PA|}+\frac{1}{|PB|}=\frac{|t_1|+|t_2|}{|t_1t_2|}=\frac{|t_1-t_2|}{|t_1t_2|}=\frac{8\sqrt{5}}{25}$. ………………………………………… 10 分

23.解:(1)当 $a=2$ 时,$f(x)=|x+1|+|x-2|$.

当 $x<-1$ 时,$f(x)>2x$ 可化为$-(x+1)-(x-2)>2x$,得 $x<\frac{1}{4}$; ……………………………… 1 分

当$-1\leqslant x\leqslant 2$ 时,$f(x)>2x$ 可化为$(x+1)-(x-2)>2x$,得 $x<\frac{3}{2}$; ……………………………… 2 分

当 $x>2$ 时,$f(x)>2x$ 可化为$(x+1)+(x-2)>2x$,得$-1>0$,不成立. ……………………………… 3 分

综上,不等式 $f(x)>2x$ 的解集为$\{x|x<\frac{3}{2}\}$. ………………………………………………… 5 分

(2)因为 $f(x)\leqslant 2$ 的解集包含$[-1,a^2+\frac{2}{9}]$,所以当$-1\leqslant x\leqslant a^2+\frac{2}{9}$时,$f(x)\leqslant 2$ 恒成立. ………… 6 分

当$-1\leqslant x\leqslant a^2+\frac{2}{9}$时,$f(x)\leqslant 2$ 可化为 $x+1+|x-a|\leqslant 2$,即$|x-a|\leqslant 1-x$, ……………………… 7 分

即 $x-1\leqslant x-a\leqslant 1-x$,则 $2x-1\leqslant a\leqslant 1$, ………………………………………………… 8 分

当$-1\leqslant x\leqslant a^2+\frac{2}{9}$时,$-3\leqslant 2x-1\leqslant 2a^2-\frac{5}{9}$,则 $a\geqslant 2a^2-\frac{5}{9}$,解得$-\frac{1}{3}\leqslant a\leqslant\frac{5}{6}$.

综上,a 的取值范围为$[-\frac{1}{3},\frac{5}{6}]$. ………………………………………………………… 10 分