高一数学参考答案

1. C　选项 ABD 都不满足集合元素的确定性，选项 C 的元素是确定的，可以组成集合.

2. D　命题“存在一个锐角三角形，它的三个内角相等”的否定为“锐角三角形的三个内角不都相等”.

3. B　由$\begin{cases} y=x, \\ y=5-4x, \end{cases}$得$\begin{cases} x=1, \\ y=1, \end{cases}$所以 $A\cap B=\{(1,1)\}$.

4. A　若 $a=b$，则$\triangle ABC$ 为等腰三角形. 若$\triangle ABC$ 为等腰三角形，则 a,b 不一定相等.

5. B　根据题意可得$\begin{cases} 2\leqslant x-2\leqslant 8, \\ x-5\neq 0, \end{cases}$解得 $4\leqslant x\leqslant 10$ 且 $x\neq 5$.

6. A　$x^2+\frac{10}{x^2+1}=x^2+1+\frac{10}{x^2+1}-1\geqslant 2\sqrt{(x^2+1)\cdot\frac{10}{x^2+1}}-1=2\sqrt{10}-1$，当且仅当 $x^2+1=\sqrt{10}$，即 $x=\pm\sqrt{\sqrt{10}-1}$ 时，等号成立，所以 $x^2+\frac{10}{x^2+1}$的最小值为 $2\sqrt{10}-1$.

7. C　因为函数 $f(x)$的定义域为$\{x\mid x\neq 0\}$，且 $f(x)$为奇函数，所以 $f(x)+f(-x)=\frac{8x^2+(12-2a)x-3a}{x}+\frac{8(-x)^2-(12-2a)x-3a}{-x}=24-4a=0$，解得 $a=6$.

8. D　依题意，每天有 $300-10x$ 套礼服被租出，该礼服租赁公司每天租赁礼服的收入为$(300-10x)\cdot(200+10x)=-100x^2+1000x+60000$ 元. 因为要使该礼服租赁公司每天租赁礼服的收入超过 6.24 万元，所以$-100x^2+1000x+60000>62400$，即 $x^2-10x+24<0$，解得 $4<x<6$. 因为 $1\leqslant x\leqslant 20$ 且 $x\in\mathbf{Z}$，所以 $x=5$，即该礼服租赁公司每套礼服每天的租价应定为 250 元.

9. ABC　等腰梯形的对角线也可能垂直，则 A 错误. 当 $x=-1,y=-2$ 时，$x^2<y^2$，则 B 错误. 若两个三角形相似，则它们的面积之比等于周长之比的平方，则 C 错误. 由 $m>2$，得 $m^2>4$，即 $m^2-4>0$，则方程 $x^2-mx+1=0$ 有实根，故 D 正确.

10. AD　$\complement_U B\cap(A\cup C)$，$(A\cap\complement_U B)\cup(C\cap\complement_U B)$都可以表示图中阴影部分.

11. BCD　若 $a-b=1$，则 $a=b+1>b$，$\sqrt{a}>\sqrt{b}$，A 错误. 若 $a>b$，则 $a^2b-ab^2=ab(a-b)>0$，B 正确. 若$\sqrt{b}-\sqrt{a}=1$，则$\sqrt{a}=\sqrt{b}-1$，$b-\sqrt{a}=b-\sqrt{b}+1=(\sqrt{b}-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$，C 正确. 若$\frac{1}{a}+\frac{1}{7b}=1$，则$\frac{a+7b}{7ab}=1$，即 $a+7b=7ab$，得$(a-1)(7b-1)=7ab-a-7b+1=1$，D 正确.

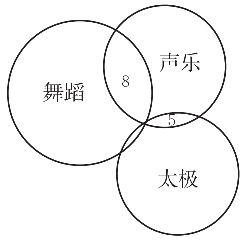
12. ACD　令 $x=y=0$，得 $f(0)+f(0)=2f(0)+2f(0)$，则 $f(0)=0$，A 正确. 令 $x=0$，得 $f(y)+f(-y)=2f(y)$，即 $f(y)=f(-y)$，则 $f(x)$的图象关于 y 轴对称，所以函数 $f(x-3)$的

图象关于直线 $x=3$ 对称,D 正确. 令 $x=y=1$,则 $f(2)=4f(1)$,令 $x=2,y=1$,得 $f(3)+f(1)=2f(2)+2f(1)$,即 $f(3)=9f(1)$,B 错误. 令 $x=y=2$,得 $f(4)+f(0)=4f(2)=16f(1)$,令 $x=y=4$,得 $f(8)+f(0)=4f(4)=64f(1)$,因为 $f(8)=f(-8)$,所以 $f(-8)=64f(1)$,C 正确.

13. $\in$;$\in$;$\notin$;$\notin$;$\in$(写对 1 个给 1 分)　因为 **N** 是自然数集,**Q** 是有理数集,**Z** 是整数集,所以 $0\in\mathbf{N}$,$\frac{1}{3}\in\mathbf{Q}$,$2.4\notin\mathbf{Z}$,$\sqrt{3}\notin\mathbf{Q}$,$4\in\mathbf{Z}$.

14. $<$　由题意得 $(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2=10+2\sqrt{21}$,$(2\sqrt{5})^2=20$. 因为 $10+2\sqrt{21}-20=2\sqrt{21}-10=\sqrt{84}-\sqrt{100}<0$,所以 $\sqrt{3}+\sqrt{7}<2\sqrt{5}$.

15. ②③④　如图,设同时报名舞蹈和报名太极的有 x 人,则 $45+26+33-90=5+8+x$,解得 $x=1$,所以同时报名舞蹈和报名太极的有 1 人. 只报名舞蹈的有 $45-8-1=36$ 人,只报名声乐的有 $33-8-5=20$ 人,报名两门课程的有 $8+5+1=14$ 人.



16. $(\frac{1}{3},\frac{1}{2}]$　因为 $a\in M$,所以 $f(a)=2a+1\in[1,3)$,

则 $f(f(a))=6-3(2a+1)=3-6a$,

由 $f(f(a))\in M$,可得 $0\leqslant 3-6a<1$,解得 $\frac{1}{3}<a\leqslant\frac{1}{2}$.

17. 解:(1)因为符号"$\exists$"表示"存在一个","存在一个"是存在量词,

所以 p 是存在量词命题. ……………………………………………… 2 分

因为符号"$\forall$"表示"所有","所有"是全称量词,

所以 q 是全称量词命题. ……………………………………………… 4 分

(2)若 $\exists x\in\mathbf{R}$,$x^2-4x+n\leqslant 0$,则 $\Delta_1=16-4n\geqslant 0$, ………………… 5 分

解得 $n\leqslant 4$. ……………………………………………………………… 6 分

若 q:$\forall x\in\mathbf{R}$,$x^2-(n-3)x+1\geqslant 0$,则 $\Delta_2=(n-3)^2-4\leqslant 0$, ………… 7 分

解得 $1\leqslant n\leqslant 5$. ……………………………………………………… 8 分

因为 p,q 均为真命题,所以 n 的取值范围为 $[1,4]$. ……………………… 10 分

18. 解:(1)由题意可得 $A=\{x|-2<x<4\}$. ……………………………… 2 分

当 $a=-2$ 时,$B=\{x|-3<x<1\}$. ……………………………………… 4 分

故 $A\cup B=\{x|-3<x<4\}$. ……………………………………………… 6 分

(2)因为 $A\cap B=B$,所以 $B\subseteq A$, ……………………………………… 8 分

则$\begin{cases}a-1\geqslant-2,\\a+3\leqslant4,\end{cases}$ …………………………………………………………… 10分

解得$-1\leqslant a\leqslant1$，即a的取值范围为$\{a|-1\leqslant a\leqslant1\}$. ……………………………… 12分

19.解：(1)因为a与b均为正数，所以$a^2+8b^2=4\geqslant2\sqrt{a^2\cdot8b^2}=4\sqrt{2}ab$，…………………… 3分

当且仅当$a^2=8b^2$，即$a=2\sqrt{2}b=\sqrt{2}$时，等号成立，…………………………………………… 4分

所以$ab\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以$ab$的最大值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$. …………………………………………………… 6分

(2)因为a与b均为负数，所以$a^2>0,b^2>0$，…………………………………………………… 7分

所以$\frac{1}{a^2}+\frac{2}{b^2}=\frac{1}{4}(a^2+8b^2)(\frac{1}{a^2}+\frac{2}{b^2})=\frac{1}{4}(17+\frac{8b^2}{a^2}+\frac{2a^2}{b^2})\geqslant\frac{1}{4}(17+2\sqrt{16})=\frac{25}{4}$，… 10分

当且仅当$\frac{8b^2}{a^2}=\frac{2a^2}{b^2}$，即$a=\sqrt{2}b=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$时，等号成立，……………………………… 11分

所以$\frac{1}{a^2}+\frac{2}{b^2}$的最小值为$\frac{25}{4}$. …………………………………………………………… 12分

20.解：(1)由$f(x)+2f(-x)=-3x-6$①，可得$f(-x)+2f(x)=3x-6$②，…………… 3分

②×2－①得$3f(x)=9x-6$，…………………………………………………………………… 5分

则$f(x)=3x-2$. ………………………………………………………………………………… 6分

(2)由题意可得$g(x)=xf(x)=3x^2-2x$，…………………………………………………… 7分

因为$g(x)$的图象的对称轴为$x=\frac{1}{3}$，开口向上，

所以$g(x)_{\min}=g(\frac{1}{3})=3\times\frac{1}{9}-2\times\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$，………………………………………… 9分

$g(x)_{\max}=g(3)=3\times9-2\times3=21$，……………………………………………………… 11分

所以$g(x)$在$[0,3]$上的值域为$[-\frac{1}{3},21]$. ……………………………………………… 12分

21.解：(1)方案一的总费用为$S_1=ax+by$(元)，方案二的总费用为$S_2=ay+bx$(元)，…… 1分

则$S_2-S_1=ay+bx-(ax+by)=a(y-x)+b(x-y)=(y-x)(a-b)$，……………… 3分

因为$x<y,a<b$，所以$(y-x)(a-b)<0$，即$S_2<S_1$，………………………………… 5分

所以采用方案二花费更少. ………………………………………………………………… 6分

(2)由(1)可知$S=S_1-S_2=(y-x)(b-a)=(x-4\sqrt{x-6})(2a+\frac{2}{a-6})$，…………… 8分

令$t=\sqrt{x-6}$，$x=t^2+6$，$x-4\sqrt{x-6}=t^2+6-4t=(t-2)^2+2\geqslant2$，……………… 9分

因为$a>6$，所以$2a+\frac{2}{a-6}=2(a-6)+\frac{2}{a-6}+12\geqslant2\sqrt{2(a-6)\cdot\frac{2}{a-6}}+12=16$，… 10分

所以差值 S 的最小值为 $2\times16=32$，当且仅当 $t=2,x=10,y=12,2(a-6)=\frac{2}{a-6}$，即 $a=7$，$b=23$ 时，等号成立. ………………………………………… 11 分

故两种方案花费的差值 S 的最小值为 32 元. ………………………………………… 12 分

22.(1)解：$f(x)$ 是奇函数. ………………………………………… 1 分

证明：由题意可知 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，关于原点对称. ………… 2 分

因为 $f(-x)=(-x)^3-\frac{1}{-x}=-x^3+\frac{1}{x}=-f(x)$，所以 $f(x)$ 是奇函数. ………… 3 分

(2)证明：设 $\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，

则 $f(x_1)-f(x_2)=x_1^3-\frac{1}{x_1}-(x_2^3-\frac{1}{x_2})=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)+\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}$

$=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2+\frac{1}{x_1x_2})$. ………………………………………… 4 分

因为 $0<x_1<x_2$，所以 $x_1-x_2<0$，$x_1^2+x_1x_2+x_2^2+\frac{1}{x_1x_2}>0$，……………… 5 分

所以 $f(x_1)-f(x_2)=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2+\frac{1}{x_1x_2})<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，……… 6 分

故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. ………………………………………… 7 分

(3)解：由题意可得 $g(x)=|\frac{af(x)}{x}+\frac{a}{x^2}-2x+2|=|ax^2-2x+2|=|a(x-\frac{1}{a})^2+2-\frac{1}{a}|$，

………………………………………… 8 分

当 $2-\frac{1}{a}\geqslant0$，即 $a\geqslant\frac{1}{2}$ 时，$\frac{1}{a}\leqslant2$，$g(x)$ 在 $[2,4]$ 上是增函数. ……………… 9 分

当 $2-\frac{1}{a}<0$，即 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，$\frac{1}{a}>2$，设方程 $g(x)=0$ 的两根为 x_1,x_2，且 $x_1<x_2$，

则 $g(x)$ 在 $[x_1,\frac{1}{a}]$，$[x_2,+\infty)$ 上是增函数. 令 $h(x)=ax^2-2x+2$，………… 10 分

则 $\begin{cases}\frac{1}{a}\geqslant4,\\ h(2)=4a-2\leqslant0,\end{cases}$ 解得 $0<a\leqslant\frac{1}{4}$. ………………………………………… 11 分

综上所述，a 的取值范围为 $(0,\frac{1}{4}]\cup[\frac{1}{2},+\infty)$. ………………………………… 12 分