

绵阳市高中 2021 级第四学期期末考试

文科数学参考答案及评分意见

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.

DACDD CBAAA BC

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 3 14. 3 15. $x + y - 4 = 0$ 16. $\ln 2$

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分.

17. 解：（1） $\because$ 命题 p ：“ $\forall x \in [1, \sqrt{2}]$, $x^2 - m \leq 0$ ”，

故 $m \geq x^2$ 对 $\forall x \in [1, \sqrt{2}]$ 恒成立； 2 分

又 $y = x^2$ 在 $[1, \sqrt{2}]$ 上的最大值为 $x = \sqrt{2}$ 时，函数值为 2， 4 分

$\therefore$ 命题 p 为真命题时，实数 m 的取值范围是 $[2, +\infty)$ ； 5 分

$\therefore$ 命题 p 为假命题时，实数 m 的取值范围为 $(-\infty, 2)$ 6 分

（2）由（1）可知，当命题 p 为真命题时， $m \geq 2$ ，

当命题 q 为真命题时， $\Delta = 4m^2 - 4(m+6) \geq 0$ ，解得 $m \leq -2$ 或 $m \geq 3$ 8 分

$\because$ 命题 “ $p \wedge \neg q$ ” 为真命题，则命题 p 为真命题，且命题 q 为假命题， 9 分

$\therefore \begin{cases} m \geq 2 \\ -2 < m < 3 \end{cases}$ ； 10 分

综上所述：实数 m 的取值范围为 $[2, 3)$ 12 分

18. 解：（1）若选择模型 $y = ka^x (k > 0, a > 1)$ ，

则 $\begin{cases} ka^2 = 360 \\ ka^3 = 480 \end{cases}$ ，解得 $a = \frac{4}{3}$ ， $k = \frac{405}{2}$ ， 2 分

故函数模型为 $y = \frac{405}{2} \left(\frac{4}{3}\right)^x$ ， 3 分

若选择模型 $y = mx^2 + n (m > 0)$ ，则 $\begin{cases} 4m + n = 360 \\ 9m + n = 480 \end{cases}$ ，

解得 $m = 24$ ， $k = 264$ ， 5 分

故函数模型为 $y = 24x^2 + 264$ 6 分

(2) 把 $x=0$ 代入 $y=\frac{405}{2}(\frac{4}{3})^x$ 可得, $y=\frac{405}{2}=202.5$,7 分

把 $x=0$ 代入 $y=24x^2+264$ 可得, $y=264$,8 分

$\because 202.5-200 < 264-200$,

$\therefore$ 选择函数模型 $y=\frac{405}{2}(\frac{4}{3})^x$ 更合适,9 分

令 $y=\frac{405}{2}(\frac{4}{3})^x > 8100$, 可得 $(\frac{4}{3})^x > 40$, 两边取对数可得, $x\lg(\frac{4}{3}) > \lg 40$,

$\therefore x > \frac{\lg 4 + \lg 10}{\lg 4 - \lg 3} = \frac{2\lg 2 + 1}{2\lg 2 - \lg 3} \approx \frac{2 \times 0.3 + 1}{2 \times 0.3 - 0.48} \approx 13.3$,11 分

故浮萍至少要到 2023 年 2 月底覆盖面积能超过 $8100m^2$12 分

19. 解: (1) $\because f(x)$ 图象与 x 轴的交点为 $(-2, 0)$ 和 $(1, 0)$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的对称轴为 $x=\frac{1}{2}$,2 分

又 $f(x)$ 在 $[3m, m+1]$ 上不单调,

则满足 $3m < \frac{1}{2} < m+1$,4 分

解得 $-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{6}$,5 分

即实数 m 的取值范围为 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{6})$6 分

(2) $\because g(x)=f(x)-2x$ 在 $x=2$ 处取得极值为 0,

$\therefore ax^2 + (b-2)x + c = 0$ 有两个相等的实根 2,7 分

故 $\begin{cases} -\frac{b-2}{a} = 2+2, \\ \frac{c}{a} = 2 \times 2, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} b = 2-4a \\ c = 4a \end{cases}$8 分

此时 $\Delta = (b-2)^2 - 4ac = 16a^2 - 16a^2 = 0$,

$\therefore f(x) = ax^2 + (2-4a)x + 4a$, 对称轴为 $x = \frac{4a-2}{2a} = 2 - \frac{1}{a}$,10 分

$\because a \geq \frac{1}{2}$, 则 $2 - \frac{1}{a} \geq 2 + (-2) = 0$,11 分

$\therefore f(x)_{\max} = f(-2) = 16a - 4$12 分

20. 解: (1) 解: $f'(x) = -3x^2 + 12 = -3(x+2)(x-2)$,1 分

令 $f'(x)=0$, $x_1=-2$, $x_2=2$,

当 x 变化时, $f'(x)$, $f(x)$ 的取值情况如下:

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	减	极小值	增	极大值	减

$f(-2)=-19$, $f(2)=13$, 又 $f(-4)=109$, $f(4)=-19$,

根据零点存在定理, $f(x)$ 分别在 $(-4, -2)$, $(-2, 2)$, $(2, 4)$ 上各有一个零点,

所以, 函数 $f(x)$ 的极大值为 13, 极小值为 -19, 且 $f(x)$ 有三个零点.

(2) 解: $f'(x)=-3(x+a)(x-a)$, 令 $f'(x)=0$, $x_1=-a$, $x_2=a$,

当 $a=0$ 时, $f'(x)=-3x^2 \leq 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数,

$\therefore f(x) < f(0)=0$, 满足题意;

当 $a > 0$ 时, 由 $f'(x) > 0$ 得 $0 < x < a$, $f'(x) < 0$ 得 $x > a$,

故 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 上是增函数, 在 $(a, +\infty)$ 上为减函数,

$\therefore f(x)_{\max} = f(a) < 0$, 得 $0 < a < \frac{\sqrt{3}}{2}$;

当 $a < 0$ 时, 由 $f'(x) < 0$ 得 $0 < x < -a$, 由 $f'(x) > 0$, 得 $x > -a$,

故 $f(x)$ 在 $(0, -a)$ 上是增函数, 在 $(-a, +\infty)$ 上为减函数,

$\therefore f(x)_{\max} = f(-a) = -2a^3 - \frac{3a}{2} > 0$, 不合题意.

综上所述, a 的取值范围是 $[0, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

21. 解: (1) $f'(x) = \frac{1}{x} - a$,

① 当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 为 $(0, +\infty)$ 上的增函数;

② 当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) = \frac{1}{x} - a = 0$, 则 $x = \frac{1}{a}$,

$\therefore$ 当 $0 < x < \frac{1}{a}$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x > \frac{1}{a}$ 时, $f'(x) < 0$,

$\therefore f(x)$ 单调递增区间为 $(0, \frac{1}{a})$ 上, 单调递减区间为 $(\frac{1}{a}, +\infty)$.

(2) 由 (1) 知, 方程 $\ln x - ax = 0$ 的两个实根 x_1, x_2 , 即 $\ln x_1 = ax_1, \ln x_2 = ax_2$,

亦即 $\ln x_2 - \ln x_1 = a(x_2 - x_1)$, 从而 $a = \frac{\ln x_2 - \ln x_1}{x_2 - x_1}$,

设 $t = \frac{x_2}{x_1}$, 又 $0 < 2x_1 < x_2$, 即 $t > 2$,

要证 $x_2 - 2\sqrt{2x_1} > 0$, 即证 $8x_1 < x_2^2$, 只需证 $3\ln 2 + \ln x_1 < 2\ln x_2$, 即证 $3\ln 2 + ax_1 < 2ax_2$,

即证 $a(2x_2 - x_1) > 3\ln 2$, 即证 $\frac{\ln x_2 - \ln x_1}{x_2 - x_1}(2x_2 - x_1) > 3\ln 2$,

即证 $\ln \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{2x_2 - x_1}{x_2 - x_1} > 3\ln 2$, 即证 $\ln \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{\frac{2x_2}{x_1} - 1}{\frac{x_2}{x_1} - 1} > 3\ln 2$, 即证 $\frac{2t-1}{t-1} \cdot \ln t > 3\ln 2$,

令 $\varphi(t) = \frac{2t-1}{t-1} \cdot \ln t, (t > 2), \varphi'(t) = \frac{2t + \frac{1}{t} - \ln t - 3}{(t-1)^2}, (t > 2)$

设 $F(t) = 2t + \frac{1}{t} - \ln t - 3, (t > 2), F'(t) = 2 - \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} = \frac{(2t+1)(t-1)}{t^2} > 0$,

则 $F(t)$ 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增, 有 $F(t) > F(2) = \frac{3}{2} - \ln 2 > 0$,

于是 $\varphi'(t) > 0$, 即有 $\varphi(t)$ 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增,

因此 $\varphi(t) > \varphi(2) = 3\ln 2$, 即 $\frac{2t-1}{t-1} \cdot \ln t > 3\ln 2$,

所以 $8x_1 < x_2^2$ 成立, 即 $x_2 - 2\sqrt{2x_1} > 0$.

22. 解: (1) 由 $\begin{cases} x = \sqrt{3} \sin \alpha \\ y = \sqrt{2} \cos \alpha \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x^2 = 3 \sin^2 \alpha \\ y^2 = 2 \cos^2 \alpha \end{cases}$, 消去 α , 公众号: 全元高考

$\therefore C$ 的普通方程为 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$; 2 分

由 $\rho(2\cos\theta + \sin\theta) = \sqrt{6}$, 得 $2\rho\cos\theta + \rho\sin\theta = \sqrt{6}$,

令 $\rho\cos\theta = x$, $\rho\sin\theta = y$,

$\therefore$ 直线 l 的直角坐标方程为 $2x + y = \sqrt{6}$ 4 分

(2) 在 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ 中, 令 $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, 所以 $2\rho^2\cos^2\theta + 3\rho^2\sin^2\theta = 6$,

即 C 的极坐标方程为 $\rho^2(2 + \sin^2\theta) = 6$, 5 分

联立 $\begin{cases} 2\rho \cos \theta + \rho \sin \theta = \sqrt{6} \\ \rho^2 (2 + \sin^2 \theta) = 6 \end{cases}$, 得 $2\cos^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta = 1$, 6 分

$\therefore \cos 2\theta + \sin 2\theta = 0$, 所以 $\tan 2\theta = -1$, 7 分

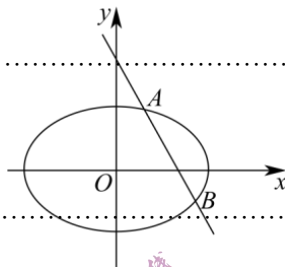
又 $0 \leq \theta < 2\pi$, 则 $0 \leq 2\theta < 4\pi$, 所以 $2\theta = \frac{3\pi}{4}$ 或 $\frac{7\pi}{4}$ 或 $\frac{11\pi}{4}$ 或 $\frac{15\pi}{4}$,

解得 $\theta = \frac{3\pi}{8}$ 或 $\frac{7\pi}{8}$ 或 $\frac{11\pi}{8}$ 或 $\frac{15\pi}{8}$, 8 分

由图可知, 两交点位于第一、四象限,

$\therefore \theta = \frac{3\pi}{8}$ 或 $\frac{15\pi}{8}$, 9 分

$\therefore \theta_1 + \theta_2 = \frac{3\pi}{8} + \frac{15\pi}{8} = \frac{9\pi}{4}$ 10 分



23. 解: (1) 当 $a = -1$ 时, $f(x) < 4$ 等价于 $|x-1| + |x-3| < 4$, 1 分

当 $x \leq 1$ 时, $1-x+3-x < 4 \Rightarrow -2x < 0$, 则 $0 < x \leq 1$, 2 分

当 $1 < x < 3$ 时, $x-1+3-x < 4 \Rightarrow 2 < 4$, 则 $1 < x < 3$, 3 分

当 $x \geq 3$ 时, $x-1+x-3 < 4 \Rightarrow 2x-4 < 4$, 则 $3 \leq x < 4$, 4 分

综上所述, 不等式 $f(x) < 4$ 的解集为 $(0, 4)$ 5 分

(2) $\because f(x) = |x+a| + |x+3a| \geq |x+a-(x+3a)| = |2a|$,

当且仅当 $(x+a)(x+3a) \leq 0$ 等号成立, $\therefore f(x)_{\min} = |2a| = 2$, 即 $a^2 = 1$, 6 分

$\because (a-m)(a+m) = \frac{4}{n^2}$, $\therefore a^2 = \frac{4}{n^2} + m^2 = 1$, 7 分

$\therefore \frac{1}{m^2} + n^2 = (\frac{1}{m^2} + n^2)(\frac{4}{n^2} + m^2) = 5 + \frac{4}{(mn)^2} + (mn)^2 \geq 5 + 2\sqrt{4} = 9$, 8 分

当且仅当 $\frac{4}{(mn)^2} = (mn)^2$, 即 $(mn)^2 = 2$, 即 $m^2 = \frac{1}{3}$, $n^2 = 6$ 时, 等号成立, 9 分

$\therefore \frac{1}{m^2} + n^2$ 的最小值为 9.