

- A. $[-2, 0)$ B. $[-2, +\infty)$ C. $(-2, +\infty)$ D. $\left(-2, \frac{1}{2}\right]$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知 $a > b$ ，则 ()

- A. $\ln(a^2 + 1) > \ln(b^2 + 1)$ B. $a^3 > b^3$
 C. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ D. $\left(\frac{1}{2}\right)^a < \left(\frac{1}{2}\right)^b$

10. 已知函数 $f(x) = 2\cos(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的一个极大值点为 1，与该极大值点相邻的一个零点为 -1，将 $f(x)$ 的图象向左平移 1 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象，则下列结论正确的是 ()

- A. $f(x) = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}x + \frac{\pi}{4}\right)$
 B. $f(x)$ 在区间 $(6, 9)$ 上单调递增
 C. $g(x)$ 为奇函数
 D. 若 $g(x)$ 在区间 $[-1, a]$ 上的值域为 $[-\sqrt{2}, 2]$ ，则 $a = 3$ 。

11. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c, $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$ ，内角 B 的平分线交 AC 于点 D 且 $BD = \sqrt{3}$ ，则下列结论正确的是 ()

- A. $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = 1$ B. b 的最小值是 2
 C. $a + 3c$ 的最小值是 $4\sqrt{3}$ D. $\triangle ABC$ 的面积最小值是 $\sqrt{3}$

12. 定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) + f(-x-2) = 0$, $f(1+x)$ 为偶函数，则 ()

- A. $f(-1-x) + f(-1+x) = 0$ B. $f(1-x) = f(1+x)$
 C. $f(x-4) = f(x)$ D. $f(2023) = 0$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2 - \log_2 x, & x \geq 1 \\ 4^x, & x < 1 \end{cases}$ ，则 $f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

14. 已知向量 $\vec{a} = (\cos \alpha, -2)$, $\vec{b} = (1, \sin \alpha)$, 且 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $\frac{\sin 2\alpha}{2 \cos^2 \alpha + 3} =$ _____.

15. 在锐角三角形 ABC , $AB = 2$, 且 $\frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan B} = \frac{4}{\tan C}$, 则 AB 边上的中线长为 _____.

16. 已知直线 l 与曲线 $y = e^{x-1}$ 和 $y = \ln(x+1)$ 都相切, 请写出符合条件的两条直线 l 的方程: _____, _____.

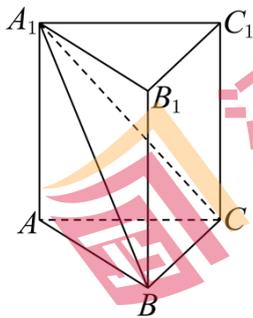
四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 设 $\{a_n\}$ 是公比不为 1 的等比数列, a_1 为 a_2, a_3 的等差中项.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的公比;

(2) 若 $a_1 = 1$, 求数列 $\{na_n\}$ 的前 n 项和.

18. 如图, 直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AB = BC = 2, AA_1 = 3$, 平面 $A_1BC \perp$ 平面 A_1ABB_1 .



(1) 求证: $AB \perp BC$;

(2) 求二面角 $A - A_1C - B$ 的正弦值.

19. 已知函数 $f(x) = \cos^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x - \sin^2 x + m$ 的最大值为 1.

(1) 求常数 m 的值;

(2) 若 $f\left(\frac{x_0}{2}\right) = \frac{1}{5}$, $x_0 \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, 求 $\cos 2x_0$ 的值.

20. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项积为 T_n , 且 $a_n + T_n = 1$.

(1) 求证: 数列 $\left\{\frac{1}{T_n}\right\}$ 是等差数列;

(2) 证明: $\frac{a_2 - a_1}{a_1} + \frac{a_3 - a_2}{a_2} + \dots + \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n} < \frac{3}{4}$.

21. 在 $\triangle ABC$ 中, A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $b^2 = c(a+c)$.

(1) 若 $B = \frac{\pi}{3}$, 求 $\frac{a}{c}$ 的值;

(2) 若 $\triangle ABC$ 是锐角三角形, 求 $\sqrt{3} \sin B + 2 \cos^2 C$ 的取值范围.

22. 已知函数 $f(x) = (x+1) \ln(x+1)$, $g(x) = \frac{1}{2} ax^2 + x$.

(1) 求证: $f'(x-1) \leq 2\sqrt{x} - 1$;

(2) 若函数 $h(x) = f(x) - g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上存在最大值, 求 a 的取值范围.

