

2023届4月质量监测考试

文科数学

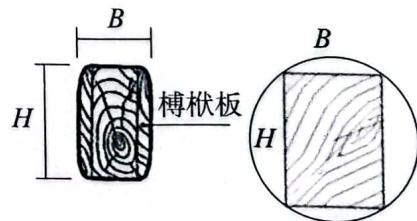
试卷满分:150分 考试时间:120分钟

注意事项:

1. 答题前, 考生先将自己的姓名、准考证号填写清楚, 将条形码准确粘贴在条形码区域内。
2. 全部答案在答题卡上完成, 答在本试卷上无效。
3. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案用0.5mm黑色笔迹签字笔写在答题卡上。
4. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共12小题, 每小题5分, 共60分, 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

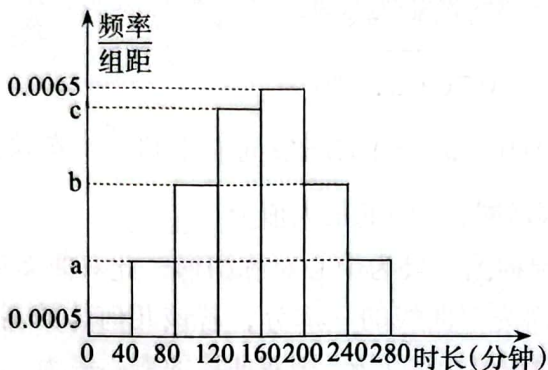
1. 已知全集 $U = \{x \in \mathbb{N} | 1 < x < 8\}$, 集合 $A = \{2, 4, 5\}$, $B = \{2, 6\}$, 则 $C_U(A \cup B) =$ ()
A. $\{4, 5\}$ B. $\{3, 7\}$ C. $\{1, 3, 7\}$ D. $\{2, 4, 5, 6\}$
2. 已知 i 为虚数单位, $(6 - 8i) \cdot z = 25 \cdot |-1 + \sqrt{3}i|$, 则复数 z 的共轭复数为 ()
A. $12 - 16i$ B. $6 - 8i$ C. $3 + 4i$ D. $3 - 4i$
3. 已知 $x = \log_{0.4} 0.15$, $5^y = 20$, $z = 0.4^{0.5}$, 则以下结论正确的是 ()
A. $x < y < z$ B. $z < x < y$ C. $y < x < z$ D. $z < y < x$
4. 在平行四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{ED}$, 则 $\overrightarrow{CD} =$ ()
A. $\frac{1}{3}\overrightarrow{BE} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CE}$ B. $\frac{2}{3}\overrightarrow{BE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CE}$ C. $\frac{1}{3}\overrightarrow{BE} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CE}$ D. $\frac{2}{3}\overrightarrow{BE} - \frac{1}{3}\overrightarrow{CE}$
5. 已知 θ 为锐角, $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \frac{1}{6}$, 则 $\tan\theta =$ ()
A. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
6. 某食品厂生产 A、B 两种半成品食物, 两种半成品都需要甲和乙两种蔬菜, 已知生产 1 吨产品 A 需蔬菜甲 3 吨, 乙 1 吨, 生产 1 吨产品 B 需蔬菜甲 2 吨, 乙 2 吨, 但是甲和乙蔬菜每天只能进货 12 吨和 8 吨. 若食品厂生产 1 吨 A 半成品食物可获利润为 3 万元, 生产 1 吨 B 半成品食物可获利润为 3 万元, 则食品厂仅凭 A、B 两种半成品食物每天可获利润不超过 9 万元的概率为 ()
A. $\frac{9}{20}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{11}{20}$ D. $\frac{9}{17}$
7. 如图, 古建筑的主要受力构件梁椽、楼板、柱子都是木头, 由于构件的拼接需要, 梁通常做成矩形. 圆形的木头加工成矩形断面, 梁是主要的水平受力构件, 作为水平或斜向受弯构件, 除了材料本身的特性, 截面抵抗矩 W 是唯一的标准. 矩形截面抵抗矩 $W = \frac{1}{6}BH^2$, (其中 B 为垂直于弯矩作用方向的长度), 木材本身的圆形直径 D 是确定的, 则截面抵抗矩最大时 $H : B$ 为 ()
A. 2 : 1 B. 3 : 2 C. $\sqrt{2} : 1$ D. 1 : 1



8. 已知圆 M 经过 $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$, $C(0, 4)$ 三点, 则圆心 M 到直线 $l: 3x - 4y - 9 = 0$ 的距离为 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. 2 D. 3

9. 为了解开学后大学生的身体健康状况, 2023 年寒假开学后, 某学校统计了学生在寒假期间每天的学习时间 (单位: 分钟), 并根据样本数据绘制得到下图所示的频率分布直方图. 图中数值 a, b, c 是公差为 0.002 的等差数列, 则估计样本数据的中位数为 ()

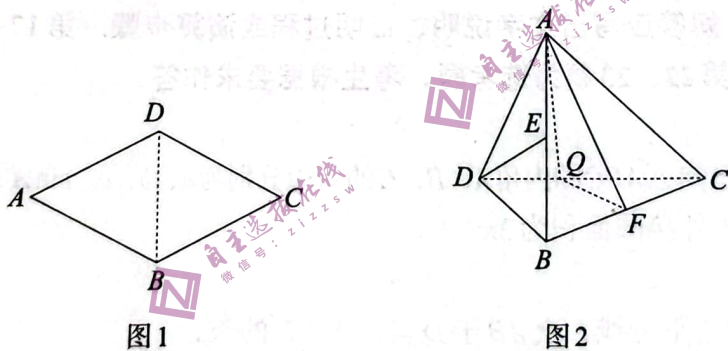


- A. 120 B. 125 C. 160 D. 165

10. 定义在 \mathbb{R} 上函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1) + f(1-x) = 0$, $f(-2x+1) = f(3+2x)$, 当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = (x-1)^3$, 则下列选项能使 $f(x) > \frac{1}{8}$ 成立的为 ()

- A. $(\frac{7}{2}, \frac{9}{2})$ B. $(\frac{21}{2}, \frac{25}{2})$ C. $(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ D. $(\frac{19}{2}, \frac{21}{2})$

11. 已知菱形 $ABCD$ 沿对角线 BD 向上折起, 得到三棱锥 $A-BCD$, F, E 分别是棱 BC, AB 的中点. 设三棱锥 $A-BCD$ 的外接球为球 O . $AB = BD = 2$, 则下列结论正确的个数为 ()



- ① $BD \perp AC$; ② CD 上存在点 Q , 使得 $DE \parallel$ 平面 AFQ ;
③ 当三棱锥 $A-BCD$ 的体积最大值时, 球 O 的表面积为 $\frac{20}{3}\pi$.

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

12. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项为 1, $a_{n+1} = \begin{cases} \frac{n+2}{n} a_n + \cos n\pi, & n \text{ 为奇数} \\ a_n + \cos n\pi, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 则数列 $\{a_n \cdot 2^{a_n}\}$ 的前 2023 项和

为 ()

- A. $2022 \cdot 2^{2024} + 2$ B. $2022 \cdot 2^{2023} + 2$
C. $2022 \cdot 2^{2024} + 1$ D. $2022 \cdot 2^{2024} - 2$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 已知函数 $f(x) = 2 \ln \frac{1}{x} - \frac{2}{x}$ 在 $(2, f(2))$ 处的切线方程为_____.

14. 某池塘中水生植物的覆盖水塘面积 x (单位: dm^2) 与水生植物的株数 y (单位: 株) 之间的相关关系, 收集了4组数据, 用模型 $y = ce^{ax} (c > 0)$ 去拟合 x 与 y 的关系, 设 $z = \ln y$, x 与 z 的数据如表格所示:

x	3	4	6	7
z	2.5	3	4	5.9

得到 x 与 z 的线性回归方程 $\hat{z} = 0.7x + a$, 则 $c =$ _____.

15. 把函数 $f(x) = \cos(2x + \varphi) (0 < \varphi < \pi)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后, 图象关于 y 轴对称, 若 $f(x)$ 在区间 $[-a, a]$ 上单调递减, 则 a 的最大值为_____.

16. 下图是单叶双曲面的立体结构图, 且为中心对称图形, 此双曲面可由线段 AB 绕与其不共面的直线 l_2 旋转而成, 其轴截面为双曲线的一部分, 若该几何体的高为2, 上底面圆的直径为4, 垂直于旋转轴的截面圆的面积最小值为 π , 则双曲线的离心率为_____.



三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17~21题为必考题，每个试题考生都必须作答。第22、23题为选考题，考生根据要求作答。

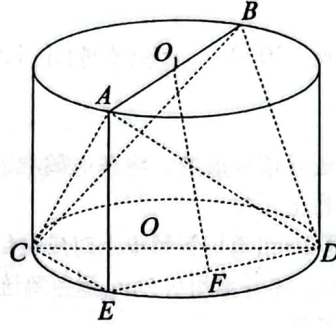
(一) 必考题：共60分。

17. (本小题满分12分) 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $\sin A \sin B = \sin^2 A - 2 \sin^2 B$, $c = 3, c > a$, $\triangle ABC$ 外接圆面积为 3π .

(1) 求 b ;

(2) 若 CD 为角 C 的角平分线, 交 AB 于 D 点, 求 CD 的长.

18. (本小题满分12分) 已知 AB , CD 分别是圆柱上、下底面圆的直径, 圆柱的高与 AB 的长相等, 均为2. 且异面直线 AB 与 CD 所成的角为 60° , O_1 , O 分别为上、下底面的圆心, 连接 AC , AD , BC , BD , 过 A 作圆柱的母线 AE . $CE > DE$, 点 F 是 DE 的中点



- (1) 证明: $O_1F \parallel$ 平面 ACE ;
 (2) 求圆柱挖去三棱锥 $A - BCD$ 后的几何体的体积.

19. (本小题满分12分) 在中国有一个习俗就是长辈给晚辈红包, 就是希望晚辈能长命百岁, 年年有今朝, 岁岁有今日, 也是非常好的一种祝福, 一种祝愿, 更是象征了一种喜庆, 更能增加气氛的一个环节。有时小朋友的红包会被父母保存, 防止红包钱乱花。

(1) 小明的老师随机调查了本校同学的红包保存情况, 经统计其红包保存情况与年龄大小情况如下表:

	未交给父母保存红包	交给父母保存红包	总计
年龄小于12岁	10	50	60
年龄不小于12岁	15	25	40
总计	25	75	100

(1) 根据表中数据, 是否有97.5%的把握可以认为同学的红包保存情况与年龄大小有关?

(2) 从上述年龄不小于12岁的学生中按是否交给父母保存红包分层选取8人, 再从8人随机抽取2人, 求这2人均将红包交给父母保存的概率。

20. (本小题满分12分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦点分别 F_1, F_2 , A, B 别为 C 的上、下顶点, 过 F_1 且垂直于 AF_2 的直线与 C 交于 D, E 两点, $|DE| = \frac{48}{13}$, $\angle AF_2B = 120^\circ$

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 已知原点 O , 过 F_2 的直线 l_1, l_2 分别交 C 于 M, N 两点和 P, Q 两点, M 在 x 轴的上方, 若 M, O, P 三点共线, 证明: 直线 NQ 过定点.

21. (本小题满分12分) 已知函数 $f(x) = x(\ln x - a) (x > 0)$ 的最小值为 -1 .

(1) 求实数 a ;

(2) 证明: $\sin x - 1 < f(x) + ax < e^x - \sin x + 1$.

(二) 选考题, 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在平面直角坐标系中, 以原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2 \cos 2\theta = 4$, 若点 $M\left(\rho_1, \frac{\pi}{3}\right)$ 在直线 $l: \rho \cos \theta = 2$ 上, 点 $N\left(\rho_2, \frac{\pi}{6}\right)$ 在圆 $E: \rho = 4\sqrt{3} \sin \theta$ 上 (其中 $\rho > 0, 0 \leq \theta < 2\pi$).

(1) 求曲线 C 的直角坐标方程和 M 、 N 的直角坐标;

(2) 已知 MN 所在直线 l 与曲线 C 交于 A 、 B 两点, 与 y 轴交于点 P , 求 $\frac{1}{|PA|} + \frac{1}{|PB|}$ 的值.

23. (本小题满分10分) 选修4-5: 不等式选讲

设满足不等式 $|x-1| + |x+2-x|(x-1) \leq 0$ 成立实数 x 的最大值为 M .

(1) 求 M 的值;

(2) 设 $a, b, c \in \mathbf{R}$, 且 $a+b+c=M$, 证明: $(a-2)^2 + (b-1)^2 + (c+1)^2 \geq \frac{1}{3}$.

