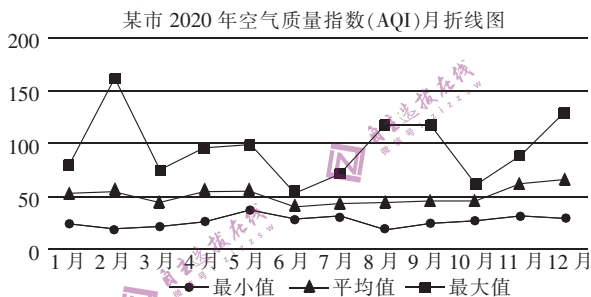


8. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_1 作与其中一条渐近线平行的直线与 C 交于点 A , 若 $\triangle AF_1F_2$ 为直角三角形, 则双曲线 C 的离心率为
- A. $\sqrt{5}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{2}$ D. 2

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 在 $(3x - \frac{1}{\sqrt{x}})^n$ 的展开式中, 各项系数和与二项式系数和之和为 128, 则
- A. 二项式系数和为 64 B. 各项系数和为 64
C. 常数项为 -135 D. 常数项为 135

10. 空气质量的指数 AQI 是反映空气质量状况的指数, AQI 指数的值越小, 表明空气质量越好. AQI 指数不超过 50, 空气质量为“优”; AQI 指数大于 50 且不超过 100, 空气质量为“良”; AQI 指数大于 100, 空气质量为“污染”. 下图是某市 2020 年空气质量指数 (AQI) 的月折线图. 下列关于该市 2020 年空气质量的叙述中一定正确的是



- A. 全年的平均 AQI 指数对应的空气质量等级为优或良
B. 每月都至少有一天空气质量为优
C. 2 月, 8 月, 9 月和 12 月均出现污染天气
D. 空气质量为“污染”的天数最多的月份是 2 月份
11. 已知圆 $M: (x-3k)^2 + (y-4k-2)^2 = 1+k^2$, 则下列四个命题中正确的命题有

- A. 若圆 M 与 y 轴相切, 则 $k = \pm \frac{\sqrt{2}}{4}$
B. 圆 M 的圆心到原点的距离的最小值为 $\frac{6}{5}$
C. 若直线 $y=x$ 平分圆 M 的周长, 则 $k=2$
D. 圆 M 与圆 $(x-3k)^2 + y^2 = 4k^2$ 可能外切

12. 已知函数 $f(x) = 2a \sin \omega x \cos \omega x - 2 \cos^2 \omega x + 1 (\omega > 0, a > 0)$, 若 $f(x)$ 的最小正周期为 π , 且对任意的 $x \in \mathbf{R}, f(x) \geq f(x_0)$ 恒成立, 下列说法正确的有

- A. $\omega = 2$
B. 若 $x_0 = -\frac{\pi}{6}$, 则 $a = \sqrt{3}$
C. 若 $f(x_0 - \frac{\pi}{2}) = 2$, 则 $a = \sqrt{3}$
D. 若 $g(x) = f(x) - 2|f(x)|$ 在 $(x_0 - \frac{3\pi}{4}, x_0 - \theta)$ 上单调递减, 则 $\frac{\pi}{2} \leq \theta < \frac{3\pi}{4}$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在答题卡中的横线上.

13. 已知向量 $\mathbf{a} = (2, m), \mathbf{b} = (1, -3)$, 若 $(2\mathbf{a} - \mathbf{b}) \perp \mathbf{b}$, 则 $m = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

14. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数, 且 $f(0) = 2, f(1) = 3$. 写出 $f(x)$ 的一个解析式为 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

15. 桂林是世界著名的风景旅游城市和中国历史文化名城, 号称“桂林山水甲天下”, 每年都会迎来无数游客. 甲同学计划今年暑假去桂林游玩, 准备在“印象刘三姐”“漓江游船”“象山景区”“龙脊梯田”这 4 个景点中任选 2 个游玩. 已知“印象刘三姐”的门票为 195 元/位, “象山景区”的门票为 35 元/位, 其他 2 个景点的门票均为 95 元/位, 则甲同学所需支付的门票费的期望值为 $\underline{\quad\quad\quad}$ 元.

16. 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形, 且 $AB \perp BC$. 若该三棱柱的外接球半径是 2, 则三棱锥 C_1-ABC 体积的最大值为 $\underline{\quad\quad\quad}$.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

某公司为了了解服务质量, 随机调查了 100 位男性顾客和 100 位女性顾客, 每位顾客对该公司的服务质量进行打分. 已知这 200 位顾客所打分数均在 $[25, 100]$ 之间, 根据这些数据得到如下的频数分布表:

顾客所打分数	$[25, 40)$	$[40, 55)$	$[55, 70)$	$[70, 85)$	$[85, 100]$
男性顾客人数	4	6	10	30	50
女性顾客人数	6	10	24	40	20

(1) 求这 200 位顾客所打分数的平均值(同一组数据用该组区间的中点值为代表).

(2) 若顾客所打分数不低于 70 分, 则该顾客对公司服务质量的态为满意; 若顾客所打分数低于 70 分, 则该顾客对公司服务质量的态为不满意. 根据所给数据, 完成下列 2×2 列联表, 并根据列联表, 判断是否有 99% 的把握认为顾客对公司服务质量的态与性别有关?

	满意	不满意
男性顾客		
女性顾客		

$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, \quad \begin{array}{c|ccc} P(K^2 \geq k) & 0.050 & 0.010 & 0.001 \\ \hline k & 3.841 & 6.635 & 10.828 \end{array}$$

18. (12 分)

已知 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $a_{n+1} - 3a_n + 2a_{n-1} = 1, a_1 = 1, a_2 = 4$.

(1) 证明: 数列 $\{a_{n+1} - a_n + 1\}$ 是等比数列.

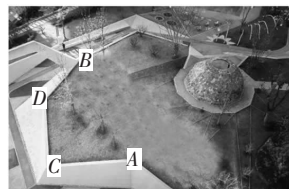
(2) 求 S_n .

19 (12 分)

为了测出图中草坪边缘 A, B 两点间的距离, 找到草坪边缘的另外两个点 C 与 D (A, B, C, D 四点共面), 测得 $AC = 1.6 \text{ m}, CD = 2 \text{ m}, BD = 1.8 \text{ m}$, 已知 $\cos \angle BDC = -\frac{\sqrt{7}}{4}, \tan \angle ACD = 3\sqrt{7}$.

(1) 求 $\triangle ACD$ 的面积;

(2) 求 A, B 两点间的距离.

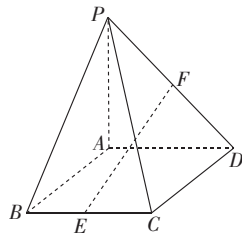


20. (12 分)

如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 底面 $ABCD$ 是菱形, $\angle ABC = 60^\circ$. 点 E, F 分别在棱 BC, PD 上(不包含端点), 且 $PF : DF = BE : CE$.

(1) 证明: $EF \parallel$ 平面 PAB .

(2) 若 $PA = \sqrt{2}AB$, 求二面角 $B-PC-D$ 的余弦值.



21. (12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 $F(c, 0)$, 离心率 $e = \frac{1}{2}$.

(1) 若 P 为椭圆 C 上一动点, 证明 P 到 F 的距离与 P 到直线 $x = \frac{a^2}{c}$ 的距离之比为定值, 并求出该定值.

(2) 设 $c = 1$, 过定点 $(0, c)$ 且斜率为 k 的直线 l 与椭圆 C 交于 M, N 两点, 在 y 轴上是否存在一点 Q , 使得 y 轴始终平分 $\angle MQN$? 若存在, 求出 Q 点的坐标; 若不存在, 请说明理由.

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = (9+a)\ln x - ax^2 + ax$ 有两个极值点.

(1) 求 a 的取值范围;

(2) 求 $f(x)$ 极小值的取值范围.