承德市 2022～2023 学年高一年级第二学期期末考试

数学试卷参考答案

1. C　由题意得，女运动员被抽取的人数为$\frac{8}{24}\times18=6$.

2. B　因为$(-1+2i)(3-i)=-1+7i$，所以$(-1+2i)(3-i)$在复平面内对应的点位于第二象限.

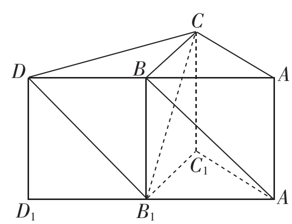
3. A　由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，得$\sin A=\frac{a\sin B}{b}=\frac{2}{3}$.

4. D　过直线外一点，有无数条直线与这条直线垂直，A 错误. 过直线外一点，有无数个平面与这条直线平行，B 错误. 过平面外一点，有无数个平面与这个平面垂直，C 错误. 过平面外一点，有且只有一个平面与这个平面平行，D 正确.

5. C　由题意得该爱心礼盒的容积为$\pi\times10^2\times10+20\times20\times10=(1000\pi+4000)\mathrm{cm}^3$.

6. B　$\tan 125^\circ+\tan 35^\circ=-\tan 55^\circ+\tan 35^\circ=-\frac{\sin 55^\circ}{\cos 55^\circ}+\frac{\sin 35^\circ}{\cos 35^\circ}=-\frac{\sin 55^\circ\cos 35^\circ-\cos 55^\circ\sin 35^\circ}{\cos 55^\circ\cos 35^\circ}=-\frac{\sin(55^\circ-35^\circ)}{\sin 35^\circ\cos 35^\circ}=-\frac{2\sin 20^\circ}{\sin 70^\circ}=-\frac{2\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}=-2\tan 20^\circ$.

7. C　如图，延长 AB 至 D，使得 $AB=BD$，延长 A_1B_1 至 D_1，使得 $A_1B_1=B_1D_1$，连接 DD_1，B_1D. $\because BD /\!/ A_1B_1$，$BD=A_1B_1$，$\therefore$四边形 A_1B_1DB 是平行四边形，$\therefore A_1B /\!/ B_1D$，则异面直线 B_1C 与 A_1B 的夹角为$\angle DB_1C$. 连接 CD，设 $AB=BC=AA_1=a$，则 $B_1D=B_1C=CD=\sqrt{2}a$，$\therefore\angle DB_1C=\frac{\pi}{3}$.



8. C　由题意得$\angle CAB=90^\circ-26.5^\circ=63.5^\circ$，$\angle DAB=90^\circ-18.5^\circ=71.5^\circ$，则 $BC=AB\cdot\tan 63.5^\circ=2AB$，$BD=AB\tan 71.5^\circ=3AB$. 在$\triangle BCD$中，由余弦定理得 $BD^2=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cdot\cos\angle BCD$，得 $AB^2+28AB-2205=(AB+63)(AB-35)=0$，得 $AB=35$ m.

9. BC　该地区这 7 年历次人口普查城镇人口比重的极差为 52.23％－11.13％＝41.1％，A 错误.

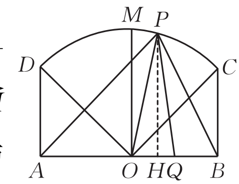
这组数据从小到大排列依次为 11.13％，12.22％，15.34％，22.04％，24.01％，36.12％，52.23％，则这组数据的中位数为 22.04％，B 正确.

因为 7×75％＝5.25，所以这组数据的第三四分位数为 36.12％，C 正确.

平均数为$\frac{1}{7}(11.13\%+12.22\%+15.34\%+22.04\%+24.01\%+36.12\%+52.23\%)=\frac{173.09\%}{7}<25\%$，D 错误.

10. BC　由题意得 $f(x)=\sin(4x+\frac{\pi}{3})$，所以 $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$，A 错误. 因为 $4\times(-\frac{\pi}{12})+\frac{\pi}{3}=0$，所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(-\frac{\pi}{12},0)$ 对称，B 正确. 因为 $4\times\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{24}$ 对称，C 正确. 因为 $x\in(-\frac{\pi}{4},0)$，所以 $4x+\frac{\pi}{3}\in(-\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{3})$，所以 $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{4},0)$ 上先减后增，D 错误.

11. ABC　由题意得 $\angle AOD=\angle BOC=\angle MOD=\angle MOC=\frac{\pi}{4}$，则 $MO\perp AB$，所以 $\overrightarrow{BC}$ 与 $\overrightarrow{OM}$ 同向，又 $\overrightarrow{OC}$ 在 $\overrightarrow{BC}$ 上的投影向量为 $\overrightarrow{BC}$，所以 $\overrightarrow{OC}$ 在 $\overrightarrow{OM}$ 上的投影向量为 $\overrightarrow{BC}$，A 正确. 如图，过 P 作 $PH\perp AB$，垂足为 H，$\overrightarrow{HP}$ 与 $\overrightarrow{OM}$ 同向，$\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{BP}$ 在 $\overrightarrow{HP}$ 上的投影向量均为 $\overrightarrow{HP}$，B 正确.



$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{QP}=|\overrightarrow{OM}||\overrightarrow{QP}|\cos\angle HPQ=|\overrightarrow{OM}||\overrightarrow{PH}|$，当 P 的位置固定，Q 在线段 AB 上移动时，$|\overrightarrow{PH}|$ 是定值，所以 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{QP}=|\overrightarrow{OM}||\overrightarrow{PH}|$ 是定值，C 正确. 当 Q 的位置固定，P 在 $\overset{\frown}{CD}$ 上移动时，$|\overrightarrow{PH}|$ 不是定值，所以 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{QP}=|\overrightarrow{OM}||\overrightarrow{PH}|$ 不是定值，D 错误.

12. BCD　由题意得 $\Omega=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$，包含 36 个样本点. 由 $\Delta=(a+b)^2-10(a+b)<0$，得 $0<a+b<10$，所以 $A=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(6,1),(6,2),(6,3)\}$，共包含 30 个样本点，$B=\{(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)\}$，共包含 6 个样本点，$A$ 与 B 不互斥，A 错误. $C=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(4,1),(4,2),(4,3),(5,1),(5,2),(5,3),(6,1),(6,2),(6,3)\}$，共包含 18 个样本点，$D=\{(4,6),(5,5),(5,6),(6,4),(6,5),(6,6)\}$，共包含 6 个样本点，$A$ 与 D 对立，B 正确. $P(BC)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$，$P(B)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$，$P(C)=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$，因为 $P(BC)=P(B)P(C)$，所以 B 与 C 相互独立，C 正确. $P(BD)=\frac{1}{36}$，$P(D)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$，因为 $P(BD)=P(B)P(D)$，所以 B 与 D 相互独立，D 正确.

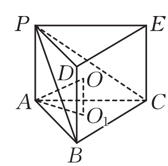
13. 5　由题意得 $2mn=10$，即 $mn=5$.

14. $-\mathrm{i}$　设 $z=b\mathrm{i}(b\in\mathbf{R},b\neq0)$，则 $(1-z)^2+2\mathrm{i}=(1-b\mathrm{i})^2+2\mathrm{i}=1-b^2+(2-2b)\mathrm{i}$，所以 $\begin{cases}1-b^2=0,\\2-2b\neq0,\end{cases}$ 得 $b=-1$，即 $z=-\mathrm{i}$.

15. $\frac{2}{3}$ 这个试验的等可能结果用下表表示：

a	b	c	d	e
2	1	6	3	8
2	1	8	3	6
6	1	2	3	8
6	1	8	3	2
8	1	2	3	6
8	1	6	3	2
2	3	6	1	8
2	3	8	1	6
6	3	2	1	8
6	3	8	1	2
8	3	2	1	6
8	3	6	1	2

共有 12 种等可能的结果，其中 $a+b>5$ 的结果有 8 种，所以 $a+b>5$ 的概率为 $\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$.



16. $\frac{44\pi}{3}$ 由题意得$\angle BAC$为锐角，$BC>AB$，所以$\triangle ABC$只有一解，即$\triangle ABC$的面积为定值. 当三棱锥 $P-ABC$ 的体积最大时，$PA\perp$平面 ABC. 如图，将三棱锥 $P-ABC$ 补成三棱柱 $ABC-PDE$，设底面外接圆的圆心为 O_1，三棱锥外接球的球心为 O，连接 AO, AO_1, OO_1，则 AO_1 为底面外接圆的半径，AO 为三棱锥外接球的半径. 由 $\cos\angle BAC=\frac{1}{4}$，得 $\sin\angle BAC=\frac{\sqrt{15}}{4}$，由 $\frac{BC}{\sin\angle BAC}=2AO_1$，得 $AO_1=\frac{2\sqrt{6}}{3}$. 易得 $OO_1\perp$平面 ABC，$OO_1=\frac{1}{2}PA=1$，则 $OO_1\perp AO_1$，所以 $AO^2=OO_1^2+AO_1^2=\frac{11}{3}$. 故该三棱锥外接球的表面积为 $4\pi\cdot AO^2=\frac{44\pi}{3}$.

17. 解：(1) $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$ ………… 2 分

$=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ ………… 4 分

$=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. ………… 5 分

(2) 因为 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$， ………… 6 分

所以 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BC}=(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}^2+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}^2$ ………… 8 分

$=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2+\frac{1}{4}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\angle BAC-\frac{3}{4}|\overrightarrow{AB}|^2=\frac{1}{2}\times 9+\frac{1}{4}\times 2\times 3\times\frac{1}{3}-\frac{3}{4}\times 4=2.$ ……………………………………………………………………………… 10 分

18. 解:(1)由 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\cos\alpha\cos\beta-\frac{1}{4}=\frac{1}{3}$, …………………… 4 分

得 $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$. …………………………………………………… 6 分

(2)因为 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{7}{12}+\frac{1}{4}=\frac{5}{6}$,………………………………… 9 分

所以 $\cos(2\alpha-2\beta)=\cos[2(\alpha-\beta)]=2\cos^2(\alpha-\beta)-1=2\times\frac{25}{36}-1=\frac{7}{18}$. ……………… 12 分

19. 解:(1)恰有一张奖券中奖的概率为 $\frac{1}{2}\times(1-\frac{1}{3})+(1-\frac{1}{2})\times\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$. …………………… 5 分

(2)设甲购买的奖券数量为 $2x$,则 A,B 两种奖券的数量均为 x.

甲没中奖的概率为 $(1-\frac{1}{2})^x(1-\frac{1}{3})^x=(\frac{1}{3})^x$,所以甲中奖的概率为 $1-(\frac{1}{3})^x$. ……… 7 分

由 $1-(\frac{1}{3})^x>\frac{99}{100}$,得 $(\frac{1}{3})^x<\frac{1}{100}$,………………………………………………………… 9 分

因为 $(\frac{1}{3})^4=\frac{1}{81}>\frac{1}{100}$,$(\frac{1}{3})^5=\frac{1}{243}<\frac{1}{100}$,且 $y=(\frac{1}{3})^x$ 为减函数,所以 $x\geqslant 5$. ……… 11 分

故甲至少要购买的奖券数量为 $5\times 2=10$. …………………………………………………… 12 分

20. 解:(1)由正弦定理得 $\sqrt{3}\sin B\sin A+2\sin A\cos^2\frac{B}{2}=3\sin A$, ………………………………… 1 分

因为 $\sin A\neq 0$,所以 $\sqrt{3}\sin B+2\cos^2\frac{B}{2}=\sqrt{3}\sin B+2\times\frac{1+\cos B}{2}=3$, ………………… 3 分

得 $\sqrt{3}\sin B+\cos B=2\sin(B+\frac{\pi}{6})=2$,即 $\sin(B+\frac{\pi}{6})=1$. ………………………………… 5 分

又 $B\in(0,\pi)$,所以 $B+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$,即 $B=\frac{\pi}{3}$. ……………………………………………… 6 分

(2)由题意得 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{3}}{4}ac$, …………………………………………………… 7 分

由余弦定理得 $b^2=9=a^2+c^2-2ac\cos B=a^2+c^2-ac\geqslant 2ac-ac=ac$,

当且仅当 $a=c=3$ 时,ac 取得最大值,$\triangle ABC$ 的面积取得最大值. ……………………… 9 分

设此时 $\triangle ABC$ 的内切圆半径为 r,由 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}r(a+b+c)=\frac{\sqrt{3}}{4}ac$,得 $r=\frac{\sqrt{3}}{2}$, ……… 11 分

所以当 $\triangle ABC$ 的面积最大时,$\triangle ABC$ 内切圆的面积为 $\pi r^2=\frac{3}{4}\pi$. ………………… 12 分

21. 解:(1)该水果店未来 10 天蓝莓日进货量的众数为 85, ………………………………………… 1 分

平均数为 $\frac{2\times 85+92+90+96+86+94+88+89+95}{10}=90$, ………………………………… 3 分

方差为$\frac{1}{10}[2\times(85-90)^2+(92-90)^2+0+(96-90)^2+(86-90)^2+(94-90)^2+(88-90)^2+(89-90)^2+(95-90)^2]=15.2$. ………………………………………………………… 5 分

(2)由题意易知,当 $x(x\leqslant96)$越小时,该水果店在未来 10 天销售蓝莓的盈利越小,所以采用二分法来确定 x 的最小值.

由题意得$\frac{85+95}{2}=90$,当 $x=90$ 时,该水果店在未来 10 天销售蓝莓的盈利为

$(90\times10-2-4-5-6)\times10-(2+4+5+6)\times15=8575$ 元>8200 元; ……………… 7 分

由题意得$\frac{85+90}{2}=87.5$,当 $x=87$ 时,该水果店在未来 10 天销售蓝莓的盈利为

$(90\times10-1-2-3-5-7-8-9)\times10-(1+2+3+5+7+8+9)\times15=8125$ 元<8200 元;

………………………………………………………………………………… 9 分

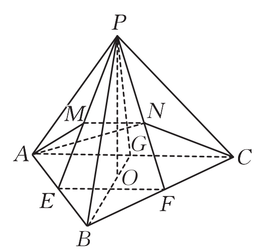
当 $x=88$ 时,该水果店在未来 10 天销售蓝莓的盈利为

$(90\times10-1-2-4-6-7-8)\times10-(1+2+4+6+7+8)\times15=8300$ 元>8200 元. ……

………………………………………………………………………………… 11 分

综上所述,x 的最小值为 88. ……………………………………………………………… 12 分

22.(1)证明:如图,连接 EF,取 AC 的中点 G,连接 PG,BG.



$\because E,F$ 分别为 AB,BC 的中点,M,N 分别为 PE,PF 的中点,

$\therefore MN/\!/EF,EF/\!/AC,\therefore MN/\!/AC$. ………………………………… 1 分

$\because PA=PC,AB=BC,\therefore PG\perp AC,BG\perp AC$. ……………………… 2 分

$\because PG,BG\subset$平面 PBG,$PG\cap BG=G$,$\therefore AC\perp$平面 PBG,$\therefore MN\perp$平面 PBG. ………………………………………………………………… 3 分

$\because PB\subset$平面 PBG,$\therefore MN\perp PB$. ………………………………………………… 4 分

(2)解:连接 AN,取 BG 上更靠近 G 的三等分点 O,连接 PO,设 $AB=4a$,则 $PA=3a$.

由(1)可得 $MN=\frac{1}{2}EF=\frac{1}{4}AC$,$\therefore S_{\triangle AMN}=\frac{1}{4}S_{\triangle ACN}$,梯形 $ACNM$ 的面积等于$\frac{5}{4}S_{\triangle ACN}$,

$\therefore V_{P-AMNC}=\frac{5}{4}V_{P-ANC}=\frac{5}{4}V_{A-PNC}$.

$\because V_{A-PNC}=\frac{1}{2}V_{A-PFC}=\frac{1}{4}V_{A-PBC}=\frac{1}{4}V_{P-ABC}$,$\therefore V_{P-AMNC}=\frac{5}{16}V_{P-ABC}$. ……………… 7 分

由正三棱锥性质可得 $PO\perp$底面 ABC,$\therefore PO\perp BO$.

$\because BG=\sqrt{BC^2-GC^2}=2\sqrt{3}a$,

$\therefore BO=\frac{2}{3}BG=\frac{4\sqrt{3}}{3}a$,$PO=\sqrt{PB^2-BO^2}=\sqrt{PA^2-BO^2}=\frac{\sqrt{33}}{3}a$.

又 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BG=4\sqrt{3}a^2$,

$\therefore V_{P-AMNC}=\frac{5}{16}V_{P-ABC}=\frac{5}{16}\times\frac{1}{3}\times S_{\triangle ABC}\times PO=\frac{5\sqrt{11}}{12}a^3=\frac{10\sqrt{11}}{3}$,得 $a=2$. ………… 9 分

$\because AB\perp PE$,$\therefore PF=PE=\sqrt{PA^2-AE^2}=2\sqrt{5}$,$PM=PN=\sqrt{5}$,

$\therefore S_{\triangle PMN}=\frac{1}{2}MN\cdot\sqrt{PM^2-\frac{1}{4}MN^2}=2$. …………………………………………………… 10 分

设 A 到平面 PMN 的距离为 h,由 $V_{A-MNP}=V_{P-AMN}=\frac{1}{5}V_{P-AMNC}=\frac{2\sqrt{11}}{3}$, ………… 11 分

得$\frac{1}{3}\times S_{\triangle PMN}\times h=\frac{2\sqrt{11}}{3}$,得 $h=\sqrt{11}$. ………………………………………………………… 12 分