三明市2023年普通高中高三毕业班质量检测

数学试题参考答案及评分细则

评分说明：

1．本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制定相应的评分细则。

2．对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应给分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分。

3．解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

4．只给整数分数，选择题和填空题不给中间分。

一、单项选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分.

1．D　2．C　3．A　4．D　5．A　6．D　7．B　8．C

二、多项选择题：本大题共4小题，每小题5分，共20分.

9．ABD　10．BC　11．AC　12．ABD

三、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分.

13．-40　14．$-\frac{\pi}{6}$（或$\frac{\pi}{2}$、$\frac{5\pi}{6}$、$\frac{3\pi}{2}$等满足$\alpha=-\frac{\pi}{6}+k\pi$或$\alpha=\frac{\pi}{2}+k\pi$的其中一值）

15．$\sqrt{3}+1$　16．$\frac{-1-\ln 3}{2}$

四、解答题：本大题共6小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17．解法一：（1）因为$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ ……………………1分

且$a^2=c^2+2c+4$，所以$b^2+c^2-2bc\cos A=c^2+2c+4$，又因为$b=2$，

所以$\cos A=-\frac{1}{2}$，因为$A\in(0,\pi)$，所以$A=\frac{2\pi}{3}$，……………………2分

在ΔACD中，因为$A=\frac{2\pi}{3}$，$CD=\sqrt{6}$，$AC=2$，根据正弦定理$\frac{CD}{\sin A}=\frac{AC}{\sin\angle ADC}$得，

$\sin\angle ADC=\frac{\sqrt{2}}{2}$. ……………………4分

又因为$\angle ADC\in(0,\dfrac{\pi}{3})$，所以$\angle ADC=\dfrac{\pi}{4}$. ....5 分

（2）在ΔACD中，因为$A=\dfrac{2\pi}{3}$，$\angle ADC=\dfrac{\pi}{4}$，所以$\angle ACD=\dfrac{\pi}{12}$，

因为CD是$\angle ACB$的角平分线，所以$\angle ACB=\dfrac{\pi}{6}$，所以$B=\dfrac{\pi}{6}$，即$AB=AC=2$，

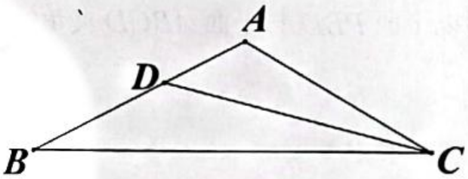
所以$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}|AB||AC|\sin A=\dfrac{1}{2}\times2\times2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$， ....7 分

又因为$S_{\Delta ACD}=\dfrac{1}{2}\times|AC|\times|CD|\times\sin\angle ACD=\dfrac{1}{2}\times2\times\sqrt{6}\times\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$， ....9 分

所以$S_{\Delta BCD}=S_{\Delta ABC}-S_{\Delta ACD}=\sqrt{3}-\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}-3}{2}$. ....10 分

解法二：（1）同解法一. ....5 分

（2）在ΔACD中，在因为$A=\dfrac{2\pi}{3}$，$\angle ADC=\dfrac{\pi}{4}$，



所以$\angle ACD=\dfrac{\pi}{12}$，

因为CD是$\angle ACB$的角平分线，所以$\angle BCD=\dfrac{\pi}{12}$，$\angle BDC=\dfrac{3\pi}{4}$，

所以$B=\dfrac{\pi}{6}$. ....6 分

在ΔBCD中，根据正弦定理$\dfrac{CD}{\sin B}=\dfrac{BC}{\sin\angle BDC}$，

所以$\dfrac{\sqrt{6}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{BC}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$，所以$BC=2\sqrt{3}$. ....8 分

所以$S_{\Delta BCD}=\dfrac{1}{2}\times|BC|\times|CD|\times\sin\angle BCD=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times\sqrt{6}\times\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\dfrac{3\sqrt{3}-3}{2}$. ...... 10 分

18. （1）因为$a_1=2$，$2a_{n+1}+a_na_{n+1}-2a_n=0$（$n\in\mathbf{N}^*$），所以$a_n\neq0$，

所以$\dfrac{2}{a_n}+1-\dfrac{2}{a_{n+1}}=0$. ....1 分

所以$\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{2}$, ...2 分

所以$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$为等差数列，首项为$\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{1}{2}$，公差$d=\dfrac{1}{2}$, ...3 分

所以$\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{a_1}+(n-1)d=\dfrac{1}{2}+(n-1)\dfrac{1}{2}=\dfrac{n}{2}$, ...5 分

所以$a_n=\dfrac{2}{n}$ ....6 分

（2）证明:因为$b_n=(-1)^n\dfrac{8}{(4n^2-1)a_n}=(-1)^n\dfrac{8}{(4n^2-1)\dfrac{2}{n}}=(-1)^n\dfrac{4n}{(2n-1)(2n+1)}$,

所以$b_n=(-1)^n(\dfrac{1}{2n-1}+\dfrac{1}{2n+1})$ ....8 分

所以，$S_{2n}=(-\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3})+(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5})+(-\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7})\cdots+(\dfrac{1}{4n-1}+\dfrac{1}{4n+1})=-1+\dfrac{1}{4n+1}$......10 分

因为$0<\dfrac{1}{4n+1}\leqslant\dfrac{1}{5}$，所以$-1<-1+\dfrac{1}{4n+1}\leqslant-\dfrac{4}{5}$，即$-1<S_{2n}\leqslant-\dfrac{4}{5}$. .... 12 分

19．解:（1）如图，取AB的中点O，连结MO，OB，

因为ΔADM为等边三角形，且$AD=2$，则$OM\perp AD$，$OM=\sqrt{3}$. ....1 分

因为$AD//BC$，$AD\perp DC$，$AD=2BC=2$，$CD=\sqrt{3}$，所以$OB\perp AD$，$OB=\sqrt{3}$.

....2 分

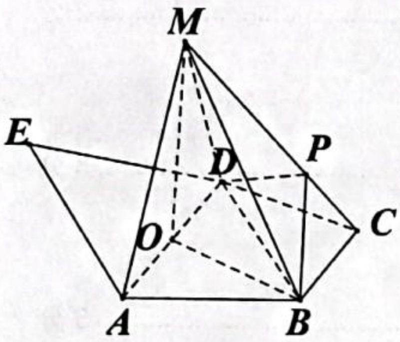
因为$OM\cap OB=O$，$OM,OB\subset$平面MOB，所以$AD\perp$平面MOB,

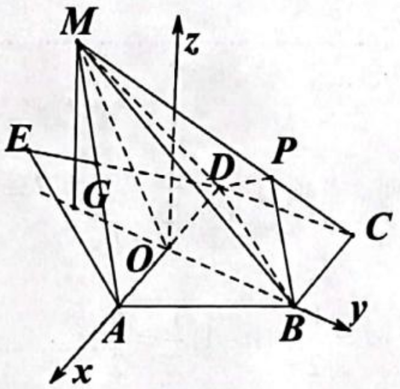
因为$BM\subset$平面MOB，所以$AD\perp BM$. ....3 分

因为$BM=a=\sqrt{6}$，所以$OM^2+OB^2=BM^2$，所以$OM\perp OB$,

因为 $OA\cap OB=O$ ，$OA,OB\subset$ 平面 $ABCD$ ，所以 $OM\perp$ 平面 $ABCD$ . ...4 分

所以 $V_{M-ABCD}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}(1+2)\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}=\frac{3}{2}$ . ...5 分





（2）由（1）知 $AD\perp$ 平面 MOB，以 OA、OB 所在直线分别为 x 轴、y 轴，在平面 MOB 内过 O 作 OB 的垂线作为 z 轴，建立空间直角坐标系 $O-xyz$，如图所示.

则 $B(0,\sqrt{3},0)$ ，$D(-1,0,0)$ ，$C(-1,\sqrt{3},0)$ . ...6 分

在 ΔMOB 中，因为 $BM=a=3$，所以 $\cos\angle MOB=\frac{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2-3^2}{2\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=-\frac{1}{2}$，

由 $\angle MOB\in(0,\pi)$，则 $\angle MOB=\frac{2\pi}{3}$，

过点 M 作直线 OB 的垂线，垂足为 G，则 $\angle MOG=\frac{\pi}{3}$，所以 $MG=\frac{3}{2}$，$OG=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $M(0,-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2})$. ....8 分

设 $P(x,y,z)$，因为 $\overrightarrow{CP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CM}$，所以 $(x+1,y-\sqrt{3},z)=\frac{1}{3}(1,-\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2})$ ，

所以 $x=-\frac{2}{3}$，$y=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$z=\frac{1}{2}$，即 $P(-\frac{2}{3},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$. ....9 分

所以 $\overrightarrow{DP}=(\frac{1}{3},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$ ，$\overrightarrow{DB}=(1,\sqrt{3},0)$ ，设平面 PBD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$ ，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{DP}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{1}{3}x_1+\frac{\sqrt{3}}{2}y_1+\frac{1}{2}z_1=0\\ \overrightarrow{DB}\cdot\boldsymbol{n}=x_1+\sqrt{3}y_1=0\end{cases}$ ， 不妨令 $x_1=\sqrt{3}$，则 $y_1=-1$，$z_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ，

所以 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},-1,\frac{\sqrt{3}}{3})$.……………………………………………………………………………10 分

不妨设平面 $ABCD$ 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$， 设平面 PBD 与平面 $ABCD$ 的夹角为 θ

则 $\cos\theta=|\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>|=\left|\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}\right|=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{3+1+\frac{1}{3}}}=\frac{\sqrt{13}}{13}$ ，

所以平面 PBD 与平面 $ABCD$ 夹角的余弦值是 $\frac{\sqrt{13}}{13}$.……………………………………………12 分

20．解法一：（1）设事件 A_i=“种子选手 M 第 i 局上场”（$i=1,2,3$），

事件 B =“甲队最终 2:1 获胜且种子选手 M 上场”.……………………………………………1 分

由全概率公式知，$P(B)=P(B|A_1)\cdot P(A_1)+P(B|A_2)\cdot P(A_2)+P(B|A_3)\cdot P(A_3)$. ....2 分

因为每名队员上场顺序随机，故 $P(A_i)=\frac{1}{5}$， $P(B|A_1)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，

$P(B|A_2)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，$P(B|A_3)=C_2^1\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$. ……………………… 5 分

所以

$P(B)=P(B|A_1)\cdot P(A_1)+P(B|A_2)\cdot P(A_2)+P(B|A_3)\cdot P(A_3)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{5}=\frac{7}{40}$,

所以甲队最终 2:1 获胜且种子选手 M 上场的概率为 $\frac{7}{40}$. ……………………………………………6 分

（2）设事件 A_0 = “种子选手 M 未上场”，事件 C = “甲队 2:1 获得胜利”

$P(A_0)=\frac{A_4^3}{A_5^3}=\frac{2}{5}$，$P(\overline{A_0})=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$，$P(C|A_0)=C_2^1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$. ………………… 8 分

$P(C)=P(B)+P(C|A_0)\cdot P(A_0)=\frac{7}{40}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{11}{40}$. ………………… 9 分

因为 $P(\overline{A_0}|C)=\frac{P(\overline{A_0}C)}{P(C)}$. ………………… 10 分

由（1）知 $P(\overline{A_0}C)=P(B)=\frac{7}{40}$，所以 $P(\overline{A_0}|C)=\frac{P(\overline{A_0}C)}{P(C)}=\frac{\frac{7}{40}}{\frac{11}{40}}=\frac{7}{11}$.

所以，已知甲队 2:1 获得最终胜利，种子选手 M 上场的概率为 $\frac{7}{11}$. ………………… 12 分

解法二：（1）同解法一. ………………… 6 分

（2）设事件 A_0 = “种子选手 M 未上场”，事件 C = “甲队 2:1 获得胜利”

$P(A_0)=\frac{A_4^3}{A_5^3}=\frac{2}{5}$，$P(\overline{A_0})=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$，$P(C|A_0)=C_2^1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$. ………………… 8 分

$P(C)=P(B)+P(C|A_0)\cdot P(A_0)=\frac{7}{40}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{11}{40}$. ………………… 9 分

因为 $P(\overline{A_0}|C)=1-P(A_0|C)=1-\frac{P(A_0C)}{P(C)}=1-\frac{P(C|A_0)\cdot P(A_0)}{P(C)}$. ………………… 10 分

因为 $P(C|A_0)=C_2^1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，$P(A_0)=\frac{2}{5}$，

所以 $P(\overline{A_0}|C)=1-P(A_0|C)=1-\frac{P(A_0C)}{P(C)}=1-\frac{P(C|A_0)\cdot P(A_0)}{P(C)}=1-\frac{\frac{1}{4}\times\frac{2}{5}}{\frac{11}{40}}=\frac{7}{11}$，

所以，已知甲队 2:1 获得最终胜利，种子选手 M 上场的概率为 $\frac{7}{11}$. ………………… 12 分

21. 解法一：(1) 因为$|MF|_{\max}=2+\sqrt{3}$，所以$a+c=2+\sqrt{3}$. ……………………1 分

设椭圆左焦点为E，因为$|OM|=|OF|=\frac{1}{2}|EF|$，所以$\angle EMF=90^{\circ}$. ……………………2 分

即$|ME|^2+|MF|^2=|EF|^2=4c^2$，

又因为$|ME|+|MF|=2a$，

所以$|ME|^2+|MF|^2+2|ME|\cdot|MF|=4a^2$，

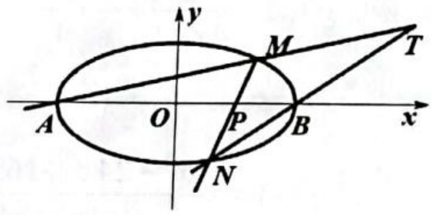
所以$2|ME|\cdot|MF|=4a^2-4c^2$，所以$|ME|\cdot|MF|=2b^2$，所以$S_{\Delta MEF}=\frac{1}{2}|ME||MF|=b^2$，

因为此时$S_{\Delta MOF}=\frac{1}{2}$，所以$S_{\Delta MEF}=1$，所以$b^2=1$，所以$b=1$. ……………………4 分

因为$a^2=b^2+c^2$，所以$a=2$，$c=\sqrt{3}$，所以椭圆E的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ………5 分

(2) 因为点P满足$\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$，所以$P(1,0)$，

由题知MN斜率不为0，设直线$MN:x=my+1$，



联立方程组$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1\\x=my+1\end{cases}$，消$x$整理得

$(m^2+4)y^2+2my-3=0$，$\Delta>0$，

设$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，则$y_1+y_2=\frac{-2m}{m^2+4}$，$y_1y_2=\frac{-3}{m^2+4}$. ……………………7 分

因为$AM:y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，$AN:y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$，

两直线方程联立得：$\frac{x-2}{x+2}=\frac{y_1(x_2-2)}{y_2(x_1+2)}=\frac{y_1(my_2+1-2)}{y_2(my_1+1+2)}=\frac{my_1y_2-y_1}{my_1y_2+3y_2}$. ……8 分

因为 $my_1y_2=\frac{3}{2}(y_1+y_2)$. .... 9 分

所以 $\frac{x-2}{x+2}=\frac{\frac{3}{2}(y_1+y_2)-y_1}{\frac{3}{2}(y_1+y_2)+3y_2}=\frac{\frac{1}{2}y_1+\frac{3}{2}y_2}{\frac{3}{2}y_1+\frac{9}{2}y_2}=\frac{1}{3}$，解得 $x=4$，

所以动点 T 的轨迹方程为 $x=4\ (y\neq 0)$. .... 10 分

由椭圆的对称性不妨设 $T(4,t)$（$t>0$），直线 TA，TB 的倾斜角为 α，β，

因为 $\angle ATB=\beta-\alpha$，则 $\tan\angle ATB=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$，

因为 $\tan\alpha=k_{TA}=\frac{t}{6}$，$\tan\beta=k_{TB}=\frac{t}{2}$，

所以 $\tan\angle ATB=\frac{\frac{t}{2}-\frac{t}{6}}{1+\frac{t}{2}\times\frac{t}{6}}=\frac{\frac{t}{3}}{1+\frac{t^2}{12}}=\frac{4t}{t^2+12}=\frac{4}{t+\frac{12}{t}}\leqslant\frac{4}{4\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

当且仅当 $t=2\sqrt{3}$ 时等号成立，此时 $T(4,2\sqrt{3})$，$\angle ATB=\frac{\pi}{6}$，

所以 $\angle ATB$ 的最大值为 $\frac{\pi}{6}$ .... 12 分

解法二：

（1）同解法一. .... 5 分

（2）因为点 P 满足 $\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$，所以 $P(1,0)$，

当直线 MN 斜率存在时，设斜率为 k，$MN:y=k(x-1)$，由题知 $k\neq 0$，

联立方程组 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2=1\\ y=k(x-1)\end{cases}$，消 y 整理得 $(1+4k^2)x^2-8k^2x+4k^2-4=0$，$\Delta>0$，

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\dfrac{8k^2}{1+4k^2}$，$x_1+x_2=\dfrac{4k^2-4}{1+4k^2}$，……………………………7 分

因为 $AM:y=\dfrac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，$AN:y=\dfrac{y_2}{x_2-2}(x-2)$，

两直线方程联立得：

$\dfrac{x-2}{x+2}=\dfrac{y_1(x_2-2)}{y_2(x_1+2)}=\dfrac{k(x_1-1)(x_2-2)}{k(x_2-1)(x_1+2)}=\dfrac{x_1x_2-2x_1-x_2+2}{x_1x_2+2x_2-x_1-2}$.……………………………8 分

因为 $x_1x_2+4=\dfrac{5}{2}(x_1+x_2)$.……………………………………………………………………9 分

所以 $\dfrac{x-2}{x+2}=\dfrac{\frac{5}{2}(x_1+x_2)-4-2x_1-x_2+2}{\frac{5}{2}(x_1+x_2)-4+2x_2-x_1-2}=\dfrac{\frac{1}{2}x_1+\frac{3}{2}x_2-2}{\frac{3}{2}x_1+\frac{9}{2}x_2-6}=\dfrac{1}{3}$，解得 $x=4$.

当 MN 斜率不存在时，$MN:x=1$，不妨令 $M(1,\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，$N(1,-\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，

因为 $A(-2,0)$，$B(2,0)$，所以 $AM:y=\dfrac{\sqrt{3}}{6}x+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$BM:y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x-\sqrt{3}$，

此时 $T(4,\sqrt{3})$，所以动点 T 的轨迹方程为 $x=4\ (y\neq 0)$.……………………………………10 分

由椭圆的对称性不妨设 $T(4,t)$（$t>0$），直线 TA，TB 的倾斜角为 α，β，

因为 $\angle ATB=\beta-\alpha$，则 $\tan\angle ATB=\tan(\beta-\alpha)=\dfrac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$，

因为 $\tan\alpha = k_{TA} = \dfrac{t}{6}$，$\tan\beta = k_{TB} = \dfrac{t}{2}$，

所以 $\tan\angle ATB = \dfrac{\dfrac{t}{2}-\dfrac{t}{6}}{1+\dfrac{t}{2}\times\dfrac{t}{6}} = \dfrac{\dfrac{t}{3}}{1+\dfrac{t^2}{12}} = \dfrac{4t}{t^2+12} = \dfrac{4}{t+\dfrac{12}{t}} \leqslant \dfrac{4}{4\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

当且仅当 $t = 2\sqrt{3}$ 时等号成立，此时 $T(4, 2\sqrt{3})$，$\angle ATB = \dfrac{\pi}{6}$，

所以 $\angle ATB$ 的最大值为 $\dfrac{\pi}{6}$ ....12 分

22．解法一：（1）$f(x)$ 定义域为 $(0,+\infty)$，因为 $f(x) = \dfrac{ax}{x+1} - \ln x$，

所以 $f'(x) = \dfrac{a}{(x+1)^2} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{-x^2+(a-2)x-1}{x(x+1)^2}$． .... 1 分

令 $f'(x)=0$，则 $-x^2+(a-2)x-1=0$，所以 $\Delta=(a-2)^2-4=a^2-4a$，

当 $0\leqslant a\leqslant 4$ 时，$\Delta\leqslant 0$，此时 $f'(x)\leqslant 0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减．................ 2 分

当 $a<0$ 时，令 $f'(x)=0$，则 $x_1 = \dfrac{a-2-\sqrt{a^2-4a}}{2} < 0$，$x_2 = \dfrac{a-2+\sqrt{a^2-4a}}{2} < 0$，

所以当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，即 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减．................................ 3 分

当 $a>4$ 时，令 $f'(x)=0$，则 $x_1 = \dfrac{a-2-\sqrt{a^2-4a}}{2} > 0$，$x_2 = \dfrac{a-2+\sqrt{a^2-4a}}{2} > 0$，

所以当 $x\in(0,\dfrac{a-2-\sqrt{a^2-4a}}{2})\cup(\dfrac{a-2+\sqrt{a^2-4a}}{2},+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，

即 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{a-2-\sqrt{a^2-4a}}{2})$ 和 $(\dfrac{a-2+\sqrt{a^2-4a}}{2},+\infty)$ 上单调递减，

当 $x\in(\frac{a-2-\sqrt{a^2-4a}}{2},\frac{a-2+\sqrt{a^2-4a}}{2})$ 时，$f'(x)>0$，

即 $f(x)$ 在 $(\frac{a-2-\sqrt{a^2-4a}}{2},\frac{a-2+\sqrt{a^2-4a}}{2})$ 上单调递增. ....4 分

综上所述：当 $a\leqslant 4$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；

当 $a>4$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\frac{a-2-\sqrt{a^2-4a}}{2})$ 和 $(\frac{a-2+\sqrt{a^2-4a}}{2},+\infty)$ 上单调递减，

在 $(\frac{a-2-\sqrt{a^2-4a}}{2},\frac{a-2+\sqrt{a^2-4a}}{2})$ 上单调递增.

....5 分

（2）要证明：$(1-x)e^{4x-\frac{1}{x}}-4x^2+x<0$，只要证明：$e^{4x-\frac{1}{x}}<\frac{4x^2-x}{1-x}$，

只要证明：$e^{4x-\frac{1}{x}}<\frac{4x-1}{\frac{1}{x}-1}$. ....6 分

只要证明：$4x-\frac{1}{x}<\ln(4x-1)-\ln(\frac{1}{x}-1)$. ....7 分

只要证明：$-\frac{1}{x}-\ln(4x-1)<-4x-\ln(\frac{1}{x}-1)$，

只要证明：$4-\frac{1}{x}-\ln(4x-1)<4-4x-\ln(\frac{1}{x}-1)$，

只要证明：$\frac{4(4x-1)}{(4x-1)+1}-\ln(4x-1)<\frac{4(\frac{1}{x}-1)}{(\frac{1}{x}-1)+1}-\ln(\frac{1}{x}-1)$. ....9 分

由（1）知，当 $a=4$ 时，$f(x)=\frac{4x}{x+1}-\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减. ....10 分

即要证明 $f(4x-1)<f(\frac{1}{x}-1)$，即要证明 $4x-1>\frac{1}{x}-1$. ....11 分

即证明 $x^2>\frac{1}{4}$. 因为 $x\in(\frac{1}{2},1)$，所以 $x^2>\frac{1}{4}$，所以原不等式成立. ....12 分

解法二：

（1）同解法一. ....5 分

（2）要证明：$(1-x)e^{4x-\frac{1}{x}}-4x^2+x<0$，只要证明：$e^{4x-\frac{1}{x}}<\frac{4x^2-x}{1-x}$. ....6 分

只要证明：$4x-\frac{1}{x}<\ln(4x^2-x)-\ln(1-x)$

只要证明：$4x-\frac{1}{x}<\ln(4x-1)+\ln x-\ln(1-x)$

只要证明：$\ln(4x-1)+\ln x-\ln(1-x)-4x+\frac{1}{x}>0$. ....7 分

令 $g(x)=\ln(4x-1)+\ln x-\ln(1-x)-4x+\frac{1}{x}$，$x\in(\frac{1}{2},1)$

所以 $g'(x)=\frac{4}{4x-1}+\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}-4-\frac{1}{x^2}$ ....8 分

所以 $g'(x)=\frac{16x^4-24x^3+16x^2-6x+1}{x^2(4x-1)(1-x)}=\frac{4(x-\frac{1}{2})^2(4x^2-2x+1)}{x^2(4x-1)(1-x)}$ ....10 分

因为 $4x^2-2x+1>0$，所以 $g'(x)>0$，即 $g(x)$ 在 $x\in(\frac{1}{2},1)$ 上单调递增. ....11 分

所以 $g(x)>g(\frac{1}{2})=0$，即原不等式成立...12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。