2008年第七届中国女子数学奥林匹克

2008年第七届中国女子数学奥林匹克竞赛于8月11日至8月18日在广东省中山纪念中学隆重举行。中国数学奥林匹克竞赛委员会主席王杰教授，广东省教育厅副厅长叶小山，中山市人大常委会副主任吴建新，中山市教育局局长刘传沛、副局长周信、中山纪念中学校长贺优琳等领导及专家出席了开幕式。共有48支队伍参与参赛，其中有来自美国、菲律宾、中国香港和澳门特别行政区的8支参赛队伍，参赛选手180余人。

中国女子数学奥林匹克竞赛始于2002年，每年举办一次，至今成功举办六届，吸引了来自国内外众多女子精英。 该活动的主要目的是提高女中学生学习数学的兴趣和信心，提升女中学生数学素质的整体水平。 她们除了参加两次数学比赛外， 还组织了健美操比赛和其它娱乐活动。 数学考试分一试和二试，选手个人总成绩为一、二试得分之和。个人按比赛成绩角逐15块金牌、30块银牌、45块铜牌。本次活动的主试委员会由朱华伟、叶中豪，冯祖鸣， 刘诗雄， 李胜宏，李伟固， 郑焕， 邹宇， 梁应德， 熊斌等专家组成。

1．(a) 问能否将集合$\{1, 2, \cdots, 96\}$表示为它的32个三元子集的并集，且三元子集的元素之和都相等；

(b) 问能否将集合$\{1, 2, \cdots, 99\}$表示为它的 33 个三元子集的并集，且三元子集的元素之和都相等．(刘诗雄供题)

2． 已知实系数多项式$\varphi(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$有三个正根，且$\varphi(0) < 0$．求证：

$$2b^3 + 9a^2d - 7abc \le 0 . \qquad ①$$

(朱华伟供题)

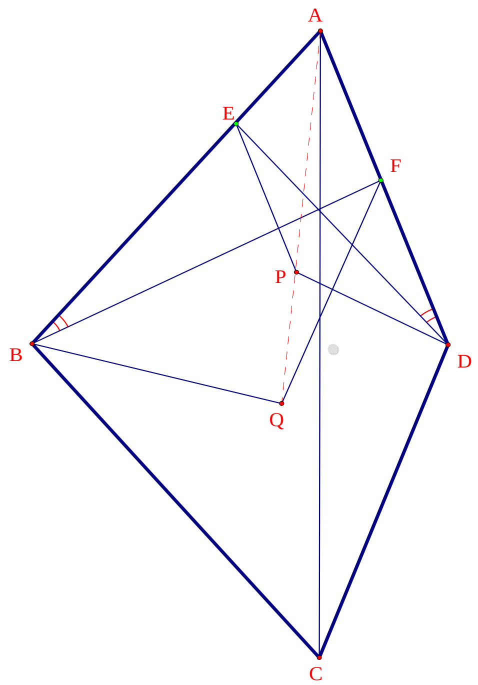
3． 求最小常数$a > 1$，使得对正方形$ABCD$内部任一点P，都存在$\Delta PAB, \Delta PBC, \Delta PCD, \Delta PDA$中的某两个三角形，使得它们的面积之比属于区间$[a^{-1}, a]$．(李伟固供题)

4． 在凸四边形 *ABCD* 的外部分别作正三角形 *ABQ*，正三角形 *BCR*，正三角形 *CDS*，正三角形 *DAP*，记四边形 *ABCD* 的对角线之和为 *x*，四边形 *PQRS* 的对边中点连线

之和为 y，求 $\frac{y}{x}$ 的最大值．(熊斌供题)

5． 已知凸四边形 $ABCD$ 满足 $AB=BC$，$AD=DC$．E 是线段 AB 上一点，F 是线段 AD 上一点，满足 B，E，F，D 四点共圆．作△DPE 顺向相似于△ADC；作△BQF 顺向相似于△ABC．求证：A，P，Q 三点共线．(叶中豪供题)

（注：两个三角形顺向相似是指它们的对应顶点同按顺时针方向或同按逆时针方向排列．）



6. 设正数列 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 满足 $(8x_2-7x_1)x_1^7=8$ 及

$$x_{k+1}x_{k-1}-x_k^2=\frac{x_{k-1}^8-x_k^8}{(x_kx_{k-1})^7},\quad k\geq 2.$$

求正实数 a，使得当 $x_1>a$ 时，有单调性 $x_1>x_2>\cdots>x_n>\cdots$；当 $0<x_1<a$ 时，不具有单调性．(李胜宏供题)

7. 给定一个 2008×2008 的棋盘，棋盘上每个小方格的颜色均不相同．在棋盘的每一个小方格中填入C，G，M，O这 4 个字母中的一个，若棋盘中每一个 2×2 的小棋盘中都有C，G，M，O这 4 个字母，则称这个棋盘为“和谐棋盘”．问有多少种不同的“和谐棋盘”？(冯祖鸣供题)

8. 对于正整数n，令 $f_n=\left[2^n\sqrt{2008}\right]+\left[2^n\sqrt{2009}\right]$．求证：数列 $f_1, f_2,\cdots$中有无穷多个奇数和无穷多个偶数．([x]表示不超过 x 的最大整数)　(冯祖鸣供题)

参考答案

1、解：(a)不能．因为$32\nmid 1+2+\cdots+96=\dfrac{96\times(96+1)}{2}=48\times 97$．

(b) 能．每个三元集的元素和为 $\dfrac{1+2+\cdots+99}{33}=\dfrac{99\times(99+1)}{33\times 2}=150$．将$1,2,3,\cdots,66$每两个一组，分成 33 个组，，每组两数之和可以排成一个公差为 1 的等差数列：

$$1+50,3+49,\cdots,33+34,\ 2+66,4+65,\cdots,32+51.$$

故如下 33 组数，每组三个数之和均相等：

$$\{1,50,99\},\{3,49,98\},\cdots,\{33,34,83\},\{2,66,82\},\{4,65,81\},\cdots,\{32,51,67\}..$$

注：此题的一般情况是

设集合 $M=\{1,2,3,\cdots,3n\}$ 的三元子集族 $A_i=\{x_i,y_i,z_i\}$，$i=1,2,\cdots n$ 满足 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=M$．记 $s_i=x_i+y_i+z_i$，求所有的整数 n，使对任意 $i,j\,(1\le i\ne j\le n)$，$s_i=s_j$．

解：首先，$n\,|\,1+2+3+\cdots+3n$，即

$$n\left|\frac{3n(3n+1)}{2}\right.\Rightarrow 2\,|\,3n+1.$$

所以，n为奇数．

又当n为奇数时，可将$1,2,3,\cdots,2n$每两个一组，分成n个组，每组两数之和可以排成一个公差为 1 的等差数列：

$$1+(n+\frac{n+1}{2}),3+(n+\frac{n-1}{2}),\cdots,n+(n+1)\ ;$$

$$2+2n,4+(2n-1),\cdots,(n-1)+(n+\frac{n+3}{2}).$$

其通项公式为

$$a_k=\begin{cases}2k-1+(n+\dfrac{n+1}{2}+1-k) & 1\le k\le\dfrac{n+1}{2},\\ [1-n+2(k-1)]+[2n+\dfrac{n+1}{2}-(k-1)] & \dfrac{n+3}{2}\le k\le n.\end{cases}$$

易知 $a_k+3n+1-k=\dfrac{9n+3}{2}$ 为一常数，故如下 n 组数每组三个数之和均相等：

$$\left\{1,n+\frac{n+1}{2},3n\right\},\left\{3,n+\frac{n-1}{2},3n-1\right\},\cdots,\left\{n,n+1,3n+1-\frac{n+1}{2}\right\};$$

$$\left\{2,2n,3n+1-\frac{n+3}{2}\right\},\cdots,\left\{n-1,n+\frac{n+3}{2},2n+1\right\}.$$

当 n 为奇数时，依次取上述数组为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，则其为满足题设的三元子集族．故 n 为所有的奇数．

2、证明：设实系数多项式 $\varphi(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 的三个正根分别为 x_1， x_2，x_3，由韦达定理有

$$x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a},\quad x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\frac{c}{a},\quad x_1x_2x_3=-\frac{d}{a}.$$

由 $\varphi(0)<0$，可得 $d<0$，故 $a>0$．

不等式①两边同除以 a^3，不等式①等价于

$$7\left(-\frac{b}{a}\right)\frac{c}{a}\le 2\left(-\frac{b}{a}\right)^3+9\left(-\frac{d}{a}\right),$$

$\Leftrightarrow 7(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)\le 2(x_1+x_2+x_3)^3+9x_1x_2x_3$，

$\Leftrightarrow x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_2^2x_1+x_2^2x_3+x_3^2x_1+x_3^2x_2\le 2(x_1^3+x_2^3+x_3^3)$　　②

因为 x_1， x_2， x_3 大于 0，所以 $(x_1-x_2)(x_1^2-x_2^2)\ge 0.$

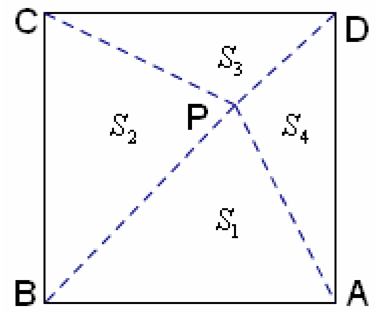
也就是 $x_1^2x_2+x_2^2x_1\le x_1^3+x_2^3.$

同理 $x_2^2x_3+x_3^2x_2\le x_2^3+x_3^3$，$x_3^2x_1+x_1^2x_3\le x_3^3+x_1^3.$

三个不等式相加可得不等式②，当且仅当 $x_1=x_2=x_3$ 时不等式等号成立．

3、解：$a_{\min}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$．首先证明 $a_{\min}\le\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，记 $\varphi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$．不妨设正方形边长为 $\sqrt{2}$．对正方形 $ABCD$ 内部一点 P，令 S_1， S_2， S_3， S_4 分别表示 ΔPAB，

ΔPBC， ΔPCD， ΔPDA的面积，不妨设$S_1 \ge S_2 \ge S_4 \ge S_3$.



令 $\lambda = \dfrac{S_1}{S_2}, \mu = \dfrac{S_2}{S_4}$，如果 $\lambda, \mu > \varphi$，由 $S_1 + S_3 = S_2 + S_4 = 1$，得$\dfrac{S_2}{1-S_2} = \mu$，得$S_2 = \dfrac{\mu}{1+\mu}$. 故 $S_1 = \lambda S_2 = \dfrac{\lambda\mu}{1+\mu} = \dfrac{\lambda}{1+\dfrac{1}{\mu}} > \dfrac{\varphi}{1+\dfrac{1}{\varphi}} = \dfrac{\varphi^2}{1+\varphi} = 1$，矛盾. 故 $\min\{\lambda, \mu\} \le \varphi$，这表明$a_{\min} \le \varphi$.

反过来对于任意$a \in (1, \varphi)$，取定$t \in (a, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2})$，使得$b = \dfrac{t^2}{1+t} > \dfrac{8}{9}$. 我们在正方形$ABCD$内取点$P$，使得$S_1 = b, S_2 = \dfrac{b}{t}, S_3 = \dfrac{b}{t^2}, S_4 = 1-b$，则我们有

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{S_2}{S_3} = t \in (a, \frac{1+\sqrt{5}}{2}), \quad \frac{S_3}{S_4} = \frac{b}{t^2(1-b)} > \frac{b}{4(1-b)} > 2 > a,$$

由此我们得到对任意$i, j \in \{1,2,3,4\}$，有$\dfrac{S_i}{S_j} \notin [a^{-1}, a]$. 这表明$a_{\min} = \varphi$.

4、解：若四边形 $ABCD$ 是正方形时，可得$\dfrac{y}{x} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$.

下面证明：$\dfrac{y}{x} \le \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$.

设P_1, Q_1, R_1, S_1分别是边 DA，AB，BC，CD 的中点，SP，PQ，QR，RS 的中点分别为 E，F，G，H. 则$P_1Q_1R_1S_1$是平行四边形.

连接P_1E, S_1E，设点 M，N 分别是 DP，DS 的中点，则

$$DS_1 = S_1N = DN = EM,$$

$$DP_1 = P_1M = MD = EN,$$

又

$$\angle P_1DS_1 = 360° - 60° - 60° - \angle PDS$$

$$= 240° - (180° - \angle END) = 60° + \angle END$$

$$= \angle ENS_1 = \angle EMP_1,$$

所以 $$\Delta DP_1S_1 \cong \Delta MP_1E \cong \Delta NES_1,$$

从而，$\triangle EP_1S_1$ 是正三角形.

同理可得，$\triangle GQ_1R_1$ 也是正三角形. 设 U，V 分别是 P_1S_1，Q_1R_1 的中点，于是有

$$EG \le EU + UV + VG = \frac{\sqrt{3}}{2}P_1S_1 + P_1Q_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}Q_1R_1$$

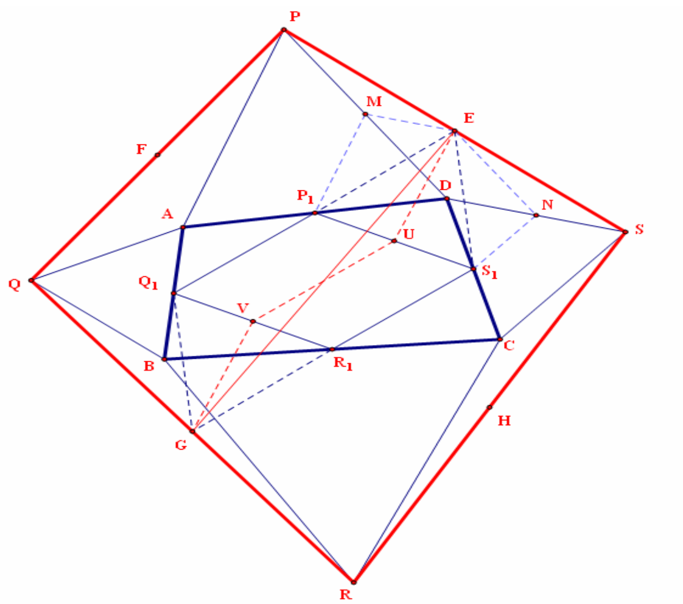
$$= P_1Q_1 + \sqrt{3}P_1S_1 = \frac{1}{2}BD + \frac{\sqrt{3}}{2}AC,$$

同理可得 $$FH \le \frac{1}{2}AC + \frac{\sqrt{3}}{2}BD,$$

把上面两式相加，得

$$y \le \frac{1+\sqrt{3}}{2}x,$$

即 $$\frac{y}{x} \le \frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$



5、**证明**

将 B、E、F、D 四点所共圆的圆心记作 O．联结 OB、OF、BD．

在△BDF 中，O 是外心，故∠BOF＝2∠BDA；

又△ABD∽△CBD，故∠CDA＝2∠BDA．

于是∠BOF＝∠CDA＝∠EPD，

由此可知等腰△BOF∽△EPD．　　①

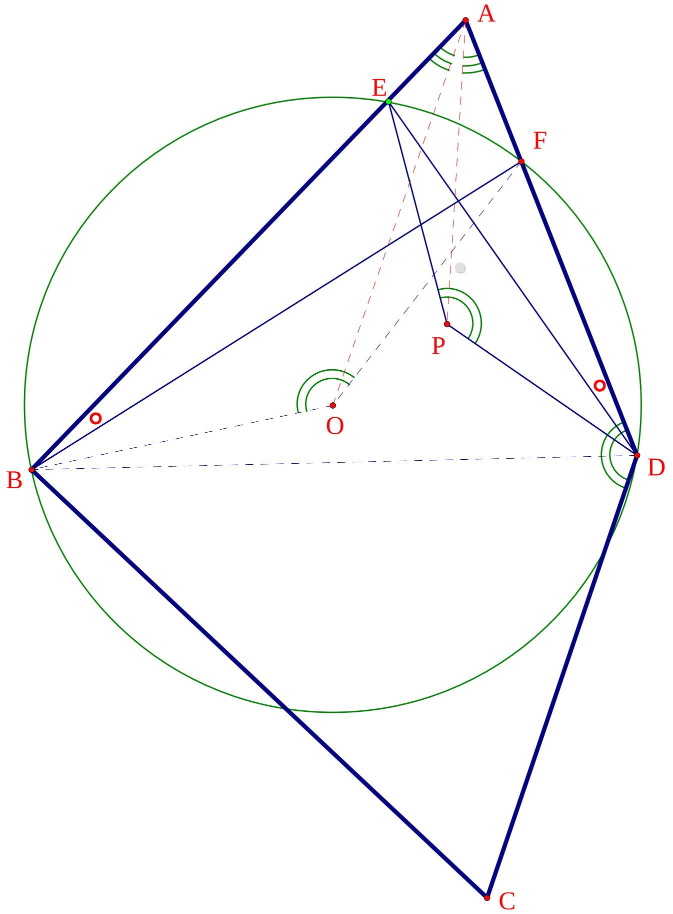
另一方面，由 B、E、F、D 四点共圆知△ABF∽△ADE．　　②

综合①，②可知，四边形 $ABOF$∽四边形 $ADPE$，

由此得∠BAO＝∠DAP．　　③

同理，可得∠BAO＝∠DAQ．　　④

③，④表明 A、P、Q 三点共线．



【附注】

事实上，当四边形 ABCD 不是菱形时，A、P、Q 三点共线与 B、E、F、D 四点共圆互为充要条件．

可利用同一法给予说明：取定 E 点，考虑让 F 点沿着直线 AD 运动．

根据相似变换可知，这时 Q 点的轨迹必是一条直线，它经过 P 点（由充分

性保证).

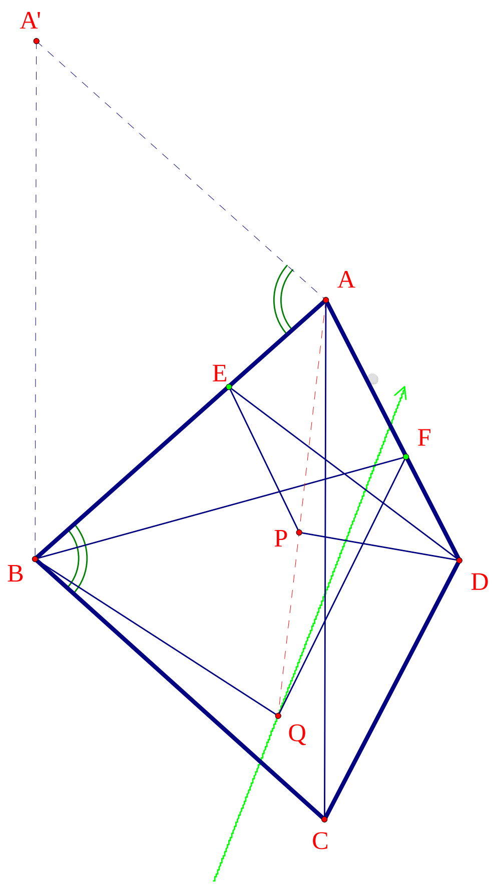
以下只要说明这条轨迹与直线 AP 不重合即可，即只要论证 A 点不在轨迹上.

为此，作 $\triangle BAA' \backsim \triangle BQF \backsim \triangle ABC$．于是由 $\angle BAA' = \angle ABC$，可得 $A'A \parallel BC$.

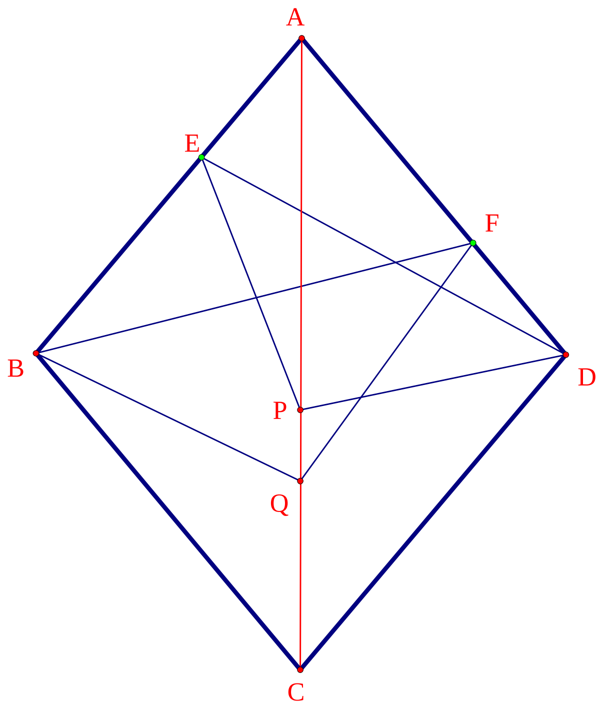
又因四边形 $ABCD$ 不是菱形，故 AD 不平于 BC.

这就表明 A'、A、D 三点不共线，也就保证了 A 点不在轨迹上.

因此，只有当 B、E、F、D 四点共圆时，Q 点才落在直线 AP 上.



而当四边形 $ABCD$ 是菱形时，不管 E、F 位置如何，所得到的 P、Q 两点总位于对角线 AC 上.



6、解：由 $x_{k+1}x_{k-1}-x_k^2=\dfrac{x_{k-1}^8-x_k^8}{(x_kx_{k-1})^7}$，有

$$\frac{x_{k+1}}{x_k}-\frac{x_k}{x_{k-1}}=\frac{1}{x_k^8}-\frac{1}{x_{k-1}^8}$$

即

$$\frac{x_{k+1}}{x_k}-\frac{1}{x_k^8}=\frac{x_k}{x_{k-1}}-\frac{1}{x_{k-1}^8}=\cdots=\frac{x_2}{x_1}-\frac{1}{x_1^8}=\frac{7}{8}$$

于是， $x_{k+1}=\dfrac{7}{8}x_k+x_k^{-7}$，则当 $x_1>0$ 时， $x_k>0,k\geq 2$.

由 $x_{k+1}-x_k=x_k(x_k^{-8}-\dfrac{1}{8})$， 则当 $x_k^{-8}-\dfrac{1}{8}<0$， 即 $x_k>8^{\frac{1}{8}}$ 时， 有 $x_{k+1}-x_k<0$， 即 $x_{k+1}<x_k,k\geq 1$.

而 $x_{k+1}=\dfrac{7}{8}x_k+x_k^{-7}\geq 8\sqrt[8]{\dfrac{1}{8^7}}=8^{\frac{1}{8}}$， 且当 $x_k=8^{\frac{1}{8}}$ 时， 等号成立.

于是，取 $a=8^{\frac{1}{8}}$， 则当 $x_k>8^{\frac{1}{8}}$ 时

$$x_1>x_2>\cdots>x_n\cdots.$$

当 $x_1<8^{\frac{1}{8}}$ 时， $x_2>x_1$ 且 $x_2>x_3>\cdots>x_n\cdots$.

故所求常数 $a=8^{\frac{1}{8}}$.

7、解：有$12\times 2^{2008}-24$种不同的“和谐棋盘”．我们首先证明下面这个结论：

在每个“和谐棋盘”中，至少出现以下情况中的某一种：(1) 每一行都是某两个字母交替出现；(2) 每一列都是某两个字母交替出现．

其实，假设某一行不是交替的，则这一行必定包含三个相邻的小方格填有不同的字母．不失一般性，假设这三个字母为C，G，M，如图 1 所示．这很容易得到$X_2=X_5=O$，并且$X_1=X_4=M$和$X_3=X_6=C$，如图 2 所示．

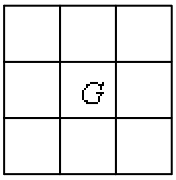


图 1

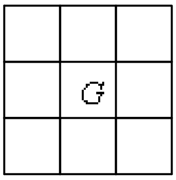


图 2

同理，我们就可以得到这三列都是两个字母交替出现．从而容易得到每一列都是某两个字母交替出现．

现在我们来计算“和谐棋盘”的个数．如果最左边一列是某两个字母(比如C和M)交替出现，马上可以得到序号为奇数的列都是这两个字母交替出现，且序号为偶数的列都是另外两个字母(比如G和O)交替出现．每一列的第一个字母可以是这一列所包含的两个字母的任意一个；容易验证任意这样的填写都可以得到“和谐棋盘”．从而我们有$C_4^2=6$种不同的方式选择第一列的两个字母，且有2^{2008}种方式决定每一列的第一个字母．所以，我们有6×2^{2008}种填法使得每一列都是交替的．同样，我们也有6×2^{2008}种填法使得每一行都是交替的．

现在所要做的就是从中减去计算了两次的填法——行和列都是交替的．显然，四个不同字母在左上角的 2×2 方格中的任何排列都可以扩充到整个棋盘得到一个“和谐棋盘”，并且行和列都是交替的，其实，只要先填好前两列使得它们是交替的，再填所有的行使得它们是交替的即可；反过来，这种双交替的填法由左上角的 2×2 方格唯一决定．有 4！=24 种方式在左上角的 2×2 方格中排列四个不同的字母．所以我们得到 24 种不同的填法使得行和列都是交替的，由此可以得到上面结果．

8、证明：我们用二进制表示$\sqrt{2008}$和$\sqrt{2009}$：

$$\sqrt{2008}=\overline{101100.a_1a_2\cdots}_{(2)}\text{ 和 }\sqrt{2009}=\overline{101100.b_1b_2\cdots}_{(2)}$$

首先，我们证明数列中有无穷多个偶数．反证法，假设数列中只有有限个偶数，从而存在一个正整数N，对每个正整数$n>N$，f_n都是奇数．我们考虑$n_1=N+1, n_2=N+2,\cdots$注意到，在二进制中，

$$f_{n_i}=\overline{101100b_1b_2\cdots b_{n_i}}_{(2)}+\overline{101100a_1a_2\cdots a_{n_i}}_{(2)},$$

这个数模 2 同余于$b_{n_i}+a_{n_i}$．因为f_{n_i}是奇数，所以$\{b_{n_i},a_{n_i}\}=\{0,1\}$．从而

$$\sqrt{2008}+\sqrt{2009}=\overline{1011001.c_1c_2\cdots c_{m-1}111\cdots}_{(2)}.$$

由此得到$\sqrt{2008}+\sqrt{2009}$在二进制中是有理数，这是不可能的，因为$\sqrt{2008}+\sqrt{2009}$是无理数．这样，我们的假设是错误的，所以数列中有无穷多个偶数．

我们同样可以证明数列中有无穷多个奇数．令$g_n=\lfloor n\sqrt{2009}\rfloor-\lfloor n\sqrt{2008}\rfloor$，显然$g_n$和$f_n$有相同的奇偶性．这样，对$n>N$，$g_n$都是偶数．注意到，在二进制中，

$$g_{n_i}=\overline{101100b_1b_2\cdots b_{n_i}}_{(2)}-\overline{101100a_1a_2\cdots a_{n_i}}_{(2)},$$

这个数模 2 同余于$b_{n_i}-a_{n_i}$．因为g_{n_i}是奇数，所以$b_{n_i}=a_{n_i}$．从而

$$\sqrt{2009}-\sqrt{2008}=\overline{0.d_1d_2\cdots d_{m-1}000\cdots}_{(2)}.$$

由此得到$\sqrt{2009}-\sqrt{2008}$在二进制中是有理数，这是不可能的，因为$\sqrt{2009}-\sqrt{2008}$是无理数．这样，我们的假设是错误的，所以数列中有无穷多个奇数．