理科数学答案

1.【答案】 C

【解析】$A=\{x|-2<x<2\}$，$B=\{x|3^x<3^2\}=\{x|\ x<2\}$，

$\therefore A\cap B=A$，$A\cup B=B$，故选：C.

2.【答案】 A

【解析】由条件$|1+i||z|=|2-i|\Rightarrow|z|=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

3.【答案】 C

【解析】因为$0<\alpha<\pi$，所以$\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\sin\alpha<1$等价于$\alpha\in(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2})\cup(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{4})$，

$\tan\alpha>1$等价于$\alpha\in(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2})$，

因此“$\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\sin\alpha<1$”是“$\tan\alpha>1$”的必要不充分条件.

4.【答案】 B

【解析】估计该校在2小时内完成作业的学生占比是$0.1\times0.5+0.3\times0.5=20\%$，A错误；抽取的学生不能在4小时内完成课后作业的人数是$100\times(0.1\times0.5+0.1\times0.5)=10$（人），B正确；抽取学生课后完成作业时间的100个数据的中位数在区间$(2.5,3)$内，C错误；抽取学生课后完成作业时间的100个数据的众数不能由直方图确定，D错误.

5.【答案】 C

【解析】因为$|MF|=3\Rightarrow M(\pm2\sqrt{2},2)$，点$M$到$y$轴的距离为$2\sqrt{2}$.

6.【答案】 A

【解析】$f(x)=2\sin(2x-\dfrac{\pi}{3})+1$，令t=$2x-\dfrac{\pi}{3}$，问题转化为求

方程$\sin t=-\dfrac{1}{2},t\in[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{5\pi}{3}]$的解，解得$t=-\dfrac{\pi}{6}$或$\dfrac{7\pi}{6}$，即解有两个，选A.

7.【答案】 D

【解析】设球的半径为r，则$OA=2r$，$OC=\frac{2r}{\sqrt{3}}$，

因此水的体积$V_1=\frac{1}{3}\pi(\frac{2r}{\sqrt{3}})^2 2r-\frac{2}{3}\pi r^3=\frac{2}{9}\pi r^3$，

所以水的体积与球的体积之比是$\frac{\frac{2}{9}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi r^3}=\frac{1}{6}$.

8.【答案】B

【解析】由图可以得到$a>0$，

且方程$f'(x)=3ax^2+2bx+c=0$的两根x_1,x_2满足$x_1+x_2>0,x_1x_2<0$，即$-\frac{2b}{3a}>0,\frac{c}{3a}<0$，

因此$a>0,b<0,c<0$.

9.【答案】A

【解析】

$f(2-x)+f(x)=\log_3(1+x)-\log_3(3-x)-(2-x)+3+\log_3(3-x)-\log_3(1+x)-x+3=4$.

因此函数$f(x)$的图象关于点$(1,2)$成中心对称，$f(0)=4,f(2)=0$，函数$f(x)$在区间$(0,2)$上单调递减，因此与坐标轴围成图形的面积是$\frac{1}{2}\times2\times4=4$.

10.【答案】B

【解析】设$Rt\Delta PF_1F_2$的内切圆半径为r，因为圆I与x轴切于$(a,0)$，所以$r=c-a$.

故$y_G=y_I=r=c-a\Rightarrow y_P=3(c-a)$，所以$3(c-a)=\frac{b^2}{a}\Rightarrow3(c-a)=\frac{c^2-a^2}{a}$，

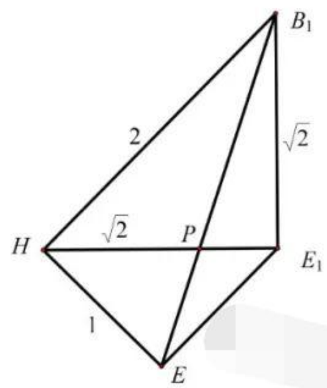
即$c=2a$，故双曲线的离心率为2.

11.【答案】C

【解析】由题意得$BE\perp$平面AA_1E_1E,设点G在平面AA_1E_1E内的投影为H_1，则点H_1在线段A_1E_1上，且$E_1H_1=1$,设点H在线段AE上，且$HE=1$，

则HH_1E_1E是一个正方形，点P的轨迹是其对角线HE_1.将△HEE_1与HB_1E_1展开到一个面内，得到如图图形，

因此$PE+PB_1$的最小值是B_1E，



$B_1E^2=1^2+\sqrt{2}^2-2\times1\times\sqrt{2}\times(-\frac{\sqrt{2}}{2})=5$,

最小值为$\sqrt{5}$.

12.【答案】B

【解析】依题意$f'(x)=ae^{ax+1}-\ln x+2-1<0$有解，即$e^{ax+1+\ln a}<\ln x-1$,即

$ax+1+\ln a+e^{ax+1+\ln a}<\ln x+ax+\ln a$，即$ax+1+\ln a+e^{ax+1+\ln a}<\ln(ax)+e^{\ln(ax)}$有解，

构造函数$g(t)=t+e^t$,单调递增，因此不等式转化为$ax+1+\ln a<\ln(ax)$，

即$a<\frac{\ln x-1}{x}$有解，记$h(x)=\frac{\ln x-1}{x}$，$h'(x)=\frac{2-\ln x}{x^2}=0\Rightarrow x=e^2$,

从而求得$h(x)\in(-\infty,e^{-2}]$,因此$0<a<e^{-2}$.

13.【答案】19

【解析】$(\vec{a}+\vec{b})^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=9+2\times3\times2\times\frac{1}{2}+4=19$

14.【答案】12

【解析】$C(3,4),r=5$，圆心到直线的距离$d=4$，因此$|AB|=6,S=12$.

15.【答案】810

【解析】方法一：

$(x^2+2x+3)^5=[(3+2x)+x^2]^5=(3+2x)^5+5(3+2x)^4x^2+\cdots+5(3+2x)x^8+x^{10}$，

因此$a_1=C_5^1\times3^4\times2=810$.

方法二：两边同时对x求导得$5(x^2+2x+3)^4(2x+2)=a_1+2a_2x+\cdots+10a_{10}x^9$,

令$x=0$，得到$a_1=810$.

16.【答案】$22-4\sqrt{3}$

【解析】$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ab\sin\angle ACB\Rightarrow ab=4\Rightarrow c^2=a^2+b^2-4\sqrt{3}$，

在ΔM_2AM_3中，$|AM_2|=\frac{\sqrt{2}}{2}b,|AM_3|=\frac{\sqrt{2}}{2}c,\angle M_2AM_3=\angle BAC+\frac{\pi}{2}$,

由余弦定理可得

$$|M_2M_3|^2=\frac{1}{2}c^2+\frac{1}{2}b^2-2\times\frac{\sqrt{2}}{2}c\times\frac{\sqrt{2}}{2}b\times\cos(\angle BAC+\frac{\pi}{2})=\frac{b^2+c^2}{2}+bc\sin\angle BAC=\frac{b^2+c^2}{2}+2,$$

同理$|M_1M_2|^2=\dfrac{a^2+b^2}{2}+2,|M_3M_1|^2=\dfrac{a^2+c^2}{2}+2$，

故$|M_1M_2|^2+|M_2M_3|^2+|M_3M_1|^2=a^2+b^2+c^2+6=2(a^2+b^2)+6-4\sqrt{3}$.

因为$a^2+b^2\geq 2ab=8$，故$|M_1M_2|^2+|M_2M_3|^2+|M_3M_1|^2\geq 22-4\sqrt{3}$.

17.【解析】（1）第n行所有数的和为

$a_n=\dfrac{1+2+3+\cdots+2^{n-1}}{2^{n-1}}=\dfrac{\dfrac{(1+2^{n-1})2^{n-1}}{2}}{2^{n-1}}=\dfrac{1}{2}+2^{n-2}$ ……………………………… 6 分

（2）前10行所有数的和为

$S_{10}=a_1+a_2+\cdots+a_{10}=\dfrac{10}{2}+(2^{-1}+2^0+\cdots+2^8)$，

即$S_{10}=5+\dfrac{\dfrac{1}{2}(1-2^{10})}{1-2}=\dfrac{10+2^{10}-1}{2}=\dfrac{1033}{2}$. ……………………………… 12 分

18.【解析】（1）$P(A)=\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$，$P(B)=\dfrac{3}{C_9^3}=\dfrac{1}{28}$，……………………………… 3 分

$P(AB)=\dfrac{1}{C_9^3}=\dfrac{1}{84}$，

因此$P(AB)=P(A)\cdot P(B)$,所以事件A,B相互独立. ……………………………… 5 分

（2）设一次游戏获利X元，则X的可能取值有$90,0,-10$，……………………………… 6 分

$P(X=90)=P(B)=\dfrac{1}{28}$，$P(X=0)=\dfrac{C_3^1C_3^1C_3^1}{C_9^3}=\dfrac{9}{28}$，$P(X=-10)=1-\dfrac{1}{28}-\dfrac{9}{28}=\dfrac{9}{14}$，

……………………………………………………………… 10 分

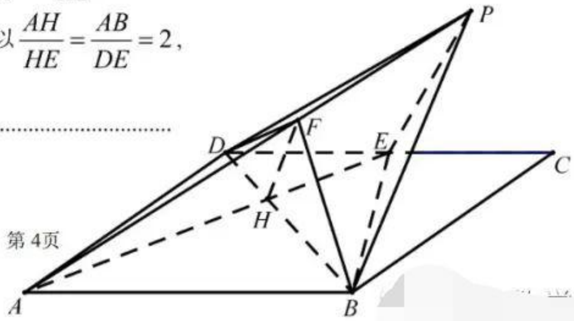
因此$EX=90\times\dfrac{1}{28}+0\times\dfrac{9}{28}-10\times\dfrac{9}{14}=-\dfrac{45}{14}$（元），不应该参与该游戏……………… 12 分

19. **【解析】**（1）连接AE，设$AE\cap BD=H$，连接FH.

因为$PE//$平面BDF，所以$PE//FH$，故$\dfrac{AF}{FP}=\dfrac{AH}{HE}$，……………………………… 3 分

又在菱形$ABCD$中，$\triangle ABH\sim\triangle EDH$，所以$\dfrac{AH}{HE}=\dfrac{AB}{DE}=2$，

所以$\dfrac{AF}{FP}=2$ ………………………………………………



（2）因为 $\angle BCD=\angle BAD=60^\circ, BC=CD=4$，

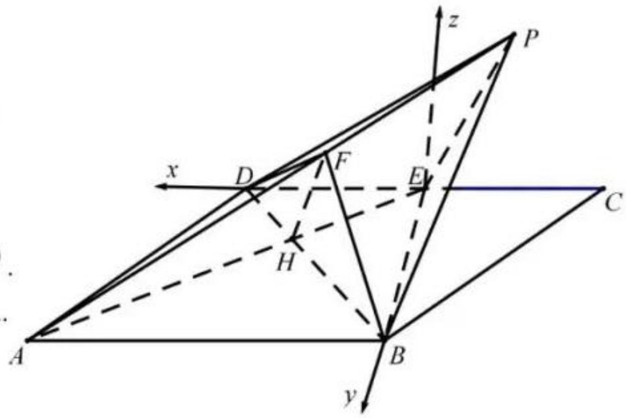
所以 $BE\perp CD\Rightarrow BE\perp ED, BE\perp EP$，因此 $\angle DEP$ 是

二面角 $P-BE-A$ 的平面角，$\angle DEP=120^\circ$，如图，以点 E 为原点，ED,EB 所在直线

为 x 轴，y 轴，建立空间直角坐标系 $E-xyz$.依据题意 $P(-1,0,\sqrt{3})$，

$A(4,2\sqrt{3},0),B(0,2\sqrt{3},0),D(2,0,0)$……………………………………………………6 分

从而 $\overrightarrow{DA}=(2,2\sqrt{3},0),\overrightarrow{DP}=(-3,0,\sqrt{3}),\overrightarrow{DB}=(-2,2\sqrt{3},0)$.



设平面 AFD 的法向量 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

由 $\vec{m}\perp\overrightarrow{DA}$ 得到 $2x_1+2\sqrt{3}y_1=0\Rightarrow x_1=-\sqrt{3}y_1$，

由 $\vec{m}\perp\overrightarrow{DP}$ 得到 $-3x_1+\sqrt{3}z_1=0\Rightarrow z_1=\sqrt{3}x_1$.

令 $y_1=1\Rightarrow x_1=-\sqrt{3},z_1=-3$，$\vec{m}=(-\sqrt{3},1,-3)$.

……………………………………………………

设平面 BFD 的法向量 $\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

由 $\vec{n}\perp\overrightarrow{DB}$ 得到 $-2x_2+2\sqrt{3}y_2=0\Rightarrow x_2=\sqrt{3}y_2$，

由 $\vec{n}\perp\overrightarrow{HF}\Rightarrow\vec{n}\perp\overrightarrow{EP}$ 得到 $-x_2+\sqrt{3}z_2=0\Rightarrow x_2=\sqrt{3}z_2$.

令 $y_2=1\Rightarrow x_2=\sqrt{3},z_2=1$，$\vec{n}=(\sqrt{3},1,1)$. ……………………………………………………10 分

因此 $\cos<\vec{m},\vec{n}>=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{-3+1-3}{\sqrt{13}\times\sqrt{5}}=-\dfrac{\sqrt{65}}{13}$，

所以，所求二面角的余弦值是 $\dfrac{\sqrt{65}}{13}$……………………………………………………12 分

20.【解析】（1） $f'(x)=xe^x-ax^2=x(e^x-ax)$，令 $f'(x)=0\Rightarrow x=0$ 或 $e^x-ax=0$.

……………………………………………………………………………………1 分

设 $g(x)=e^x-ax$，则 $g'(x)=e^x-a$，

令 $g'(x)=0\Rightarrow x=\ln a$，

且 $x<\ln a$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；$x>\ln a$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

所以 $g(x)_{\min}=g(\ln a)=a-a\ln a=a(1-\ln a)$，…………………………………………3 分

因为 $a>\mathrm{e}$，$g(x)_{\min}<0$，此时 $g(x)$ 在 R 上有且仅有两个零点，记为 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，

因为 $g(0)=1>0$，$g(1)=\mathrm{e}-a<0$，$x\to+\infty$ 时 $g(x)>0$，所以 $0<x_1<1<x_2$，

所以 $f(x)$ 在 R 上有且仅有 3 个极值点. ……………………………………………………5 分

（2）$f'(x)=x(\mathrm{e}^x-ax)$，当 $x>0$，$a>\mathrm{e}$ 时，

$f(x)$ 在 R 上有 3 个极值点：$0,x_1,x_2$，其中 $0<x_1<1<x_2$，

且 $f(0)=-1<0$，

当 $0<x<x_1$ 时，$g(x)>0$，则 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

当 $x_1<x<x_2$ 时，$g(x)<0$，则 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

当 $x>x_2$ 时，$g(x)>0$，则 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

所以 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内的极大值为 $f(x_1)$，极小值为 $f(x_2)$，………………………8 分

且 $\mathrm{e}^{x_1}=ax_1,\mathrm{e}^{x_2}=ax_2\Rightarrow a=\dfrac{\mathrm{e}^{x_1}}{x_1},a=\dfrac{\mathrm{e}^{x_2}}{x_2}$.

所以 $f(x_2)=(x_2-1)\mathrm{e}^{x_2}-\dfrac{1}{3}ax_2^{\ 3}=(x_2-1)\mathrm{e}^{x_2}-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\mathrm{e}^{x_2}}{x_2}x_2^{\ 3}=(x_2-1)\mathrm{e}^{x_2}-\dfrac{x_2^{\ 2}\mathrm{e}^{x_2}}{3}$

$$=\frac{\mathrm{e}^{x_2}}{3}(-x_2^{\ 2}+3x_2-3)=\frac{\mathrm{e}^{x_2}}{3}[-(x_2-\frac{3}{2})^2-\frac{3}{4}]<0,$$ ………………………… 10 分

同理 $f(x_1)=\dfrac{\mathrm{e}^{x_1}}{3}[-(x_1-\dfrac{3}{2})^2-\dfrac{3}{4}]<0$，而当 $x\to+\infty$ 时 $f(x)>0$，因此函数 $f(x)$ 在区间 $(0,x_2]$ 内无零点，在区间 $(x_2,+\infty)$ 上有且只有一个零点.

综上所述，$a>\mathrm{e}$ 时，$f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内有且仅有一个零点. …………………… 12 分

21.【解析】（1）由题意 $a=2$，设椭圆 C 的右顶点为 B，

$S_{\triangle APQ}=S_{\triangle APB}=\dfrac{1}{2}\times2a\,|\,y_P\,|\le ab$，因此 $b=1$，

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. ……………………………………………………4 分

（2）设 $D(0,m),E(0,n),R(s,t)$，由 $\overrightarrow{DR}\cdot\overrightarrow{ER}=0$ 得到：$s^2+(t-m)(t-n)=0$，即 $s^2+t^2-(m+n)t+mn=0$，……5 分

设 $PQ:x=ky$，直线 AP,AQ 的方程分别是 $y=\frac{m}{2}(x+2),y=\frac{n}{2}(x+2)$，

联立 $\begin{cases}x=ky,\\ y=\frac{m}{2}(x+2)\end{cases}$ 解得 $x=\frac{2km}{2-mk},y=\frac{2m}{2-mk}$，即点 P 的坐标为 $(\frac{2km}{2-mk},\frac{2m}{2-mk})$，

因为点 P 在椭圆上，所以 $\frac{k^2m^2}{(2-km)^2}+\frac{4m^2}{(2-km)^2}=1$，化简得 $4m^2+4km-4=0$，

同理，$4n^2+4nk-4=0$，因此 $m+n=-k,mn=-1$，……10 分

得到 $s^2+t^2+kt-1=0$，当 $\begin{cases}t=0,\\ s^2+t^2-1=0\end{cases}$ 时恒成立，即 $t=0,s=\pm1$.

因此，存在点 $R(-1,0)$ 或 $(1,0)$ 使得 $\overrightarrow{DR}\cdot\overrightarrow{ER}=0$ 恒成立. ……12 分

选做部分

22.【解析】:（1）直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=6+t,\\ y=-t\end{cases}$（$t$ 为参数），直线 l 的直角方程为 $x+y-6=0$；

……2 分

曲线 C 的极坐标方程 $\rho^2=\frac{3}{1+2\sin^2\theta}$ 可以化为 $\rho^2+2\rho^2\sin^2\theta=3$，

直角坐标方程为 $x^2+y^2+2y^2=3$，即 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$. ……5 分

（2）由曲线 C 的参数方程，可设 $Q(\sqrt{3}\cos\theta,\sin\theta)$，

则 $|PQ|=\frac{|\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta-6|}{\sqrt{1+1}}=\frac{6-2\sin(\theta+\frac{\pi}{3})}{\sqrt{2}}$……8 分

当 $\sin(\theta+\frac{\pi}{3})=1$ 时，$|PQ|$ 取得最小值 $2\sqrt{2}$ ……10 分

23.【解析】（1）$f(x)=|\frac{1}{x}+2|+|\frac{1}{x}-2|\geq|(\frac{1}{x}+2)-(\frac{1}{x}-2)|=4$，……3 分

上式能取到等号，因此 $m=4$. ……5 分

（2）$\dfrac{ab}{a+4b}=\dfrac{1}{\dfrac{4}{a}+\dfrac{1}{b}}=\dfrac{4}{(a+b)(\dfrac{4}{a}+\dfrac{1}{b})}=\dfrac{4}{5+\dfrac{4b}{a}+\dfrac{a}{b}}\le\dfrac{4}{5+2\sqrt{4}}=\dfrac{4}{9}$，……………………8 分

当 $\begin{cases} a+b=4, \\ \dfrac{4b}{a}=\dfrac{a}{b}, \end{cases}$ 即 $a=\dfrac{8}{3},b=\dfrac{4}{3}$ 时，上式取等号，

所以 $\dfrac{ab}{a+4b}$ 的最大值是 $\dfrac{4}{9}$. ……………………………………………………10 分