参考答案及解析

一、选择题

1. C 【解析】由题意得集合 $A=(0,5]$，$B=(-\infty,4)$，$\complement_{\mathbf{R}}B=[4,+\infty)$，所以 $A\cup(\complement_{\mathbf{R}}B)=(0,+\infty)$. 故选 C 项.

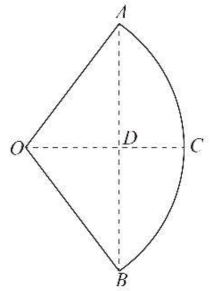
2. A 【解析】因为 $i^{2\,023}=-i$，所以 $z=\dfrac{1-i^{2\,023}}{1-i}=\dfrac{1+i}{1-i}=i$，所以 $\overline{z}=-i$，$\overline{z}-z=-2i$. 故选 A 项.

3. A 【解析】由题意，命题 p 的否定"$\forall x\in\mathbf{R}$，$mx^2-2mx+1\geqslant0$"为真命题. 当 $m=0$ 时，$1>0$ 恒成立；当 $m\neq0$ 时，$\Delta=(2m)^2-4m\leqslant0$，解得 $m\in(0,1]$. 综上，$m\in[0,1]$. 故选 A 项.

4. C 【解析】由 $a>0$ 且 $a\neq1$，得 $y=\sqrt{1-ax}$ 为单调递减函数，由复合函数单调性法则得 $a\in(0,1)$，又 $\begin{cases}1-3a\geqslant0,\\1-2a\geqslant0,\end{cases}$ 解得 $a\in\left(0,\dfrac{1}{3}\right]$. 故选 C 项.

5. B 【解析】充分性：已知正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$，若 $\dfrac{a}{\cos A}=\dfrac{b}{\cos B}=\dfrac{c}{\cos C}$，则 $\dfrac{2R\sin A}{\cos A}=\dfrac{2R\sin B}{\cos B}=\dfrac{2R\sin C}{\cos C}$，即 $\tan A=\tan B=\tan C$，所以 $\triangle ABC$ 为等边三角形，则 $A-B=B-C=C-A=0$，所以 $\cos(A-B)\cdot\cos(B-C)\cos(C-A)=1$ 成立；必要性：若 $\cos(A-B)\cdot\cos(B-C)\cos(C-A)=1$，则只能 $A-B=B-C=C-A=0$，$\triangle ABC$ 为等边三角形，所以 $\dfrac{a}{\cos A}=\dfrac{b}{\cos B}=\dfrac{c}{\cos C}$ 成立. 故选 B 项.

6. C 【解析】由题意可得 $CD=2$ cm，$AB=8$ cm，所以 $AD=4$ cm. 设圆的半径为 R，$\angle AOC=\theta$，$\theta\in(0^\circ,90^\circ)$. 在 $\triangle AOD$ 中，由勾股定理可得 $R^2=(R-2)^2+4^2$，所以 $R=5$ cm，$\sin\theta=\dfrac{4}{5}$，$\cos\theta=\dfrac{3}{5}$. 因为 $\sin\theta>\cos\theta$，所以 $\theta\in(45^\circ,90^\circ)$，$2\theta\in(90^\circ,180^\circ)$，$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{24}{25}$，所以 $2\theta\approx180^\circ-74^\circ\approx1.85$ rad，所以扇形的面积 $S_1=\dfrac{1}{2}\times1.85\times5^2\approx23.1$ cm². 又 $\triangle AOB$ 的面积 $S_2=\dfrac{1}{2}\times8\times3=12$ cm²，所以弓形面积约为 $S_1-S_2=11.1$ cm². 故选 C 项.



7. C 【解析】因为 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2-2x+1$，所以 $f'(x)=x^2+x-2=(x-1)(x+2)$. 令 $f'(x)=0$，解得 $x=-2$ 或 $x=1$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$，$(1,+\infty)$ 内单调递增，在 $(-2,1)$ 内单调递减，所以极小值为 $f(1)=-\dfrac{1}{6}$. 令 $f(x)=-\dfrac{1}{6}$，则 $(2x+7)(x-1)^2=0$，所以 $f\left(-\dfrac{7}{2}\right)=-\dfrac{1}{6}$，由题意得 $-\dfrac{7}{2}\leqslant2a<1<a+3$，所以 a 的取值范围为 $\left[-\dfrac{7}{4},\dfrac{1}{2}\right)$. 故选 C 项.

8. D 【解析】取 $\forall x_1,x_2\in\mathbf{R}$ 且 $x_1<x_2$，则 $x_2-x_1>0$，$f(x_2)-f(x_1)=f(x_2-x_1+x_1)-f(x_1)=f(x_2-x_1)+f(x_1)+1-f(x_1)=f(x_2-x_1)+1>0$，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. $f(ax^2+2x)+f(x)<1\Leftrightarrow f(ax^2+2x)+f(x)+1<2\Leftrightarrow f(ax^2+3x)<f(1)\Leftrightarrow ax^2+3x<1$，所以当 $x\in[1,2]$ 时，$ax^2+3x<1$ 有解，即 $a<\dfrac{1-3x}{x^2}$ 有解. 令 $t=\dfrac{1}{x}$，则 $t\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$，设 $g(t)=t^2-3t=\left(t-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}$，则 $g(t)$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上单调递减，当 $t=\dfrac{1}{2}$，即 $x=2$ 时，$g(t)_{\max}=-\dfrac{5}{4}$，所以 $a<-\dfrac{5}{4}$. 故选 D 项.

二、选择题

9. BD 【解析】$\begin{cases}x+y=3,\\y+z=4,\\z+x=5\end{cases}$ 的解集为 $\{(2,1,3)\}$，故 A 项错误；$\dfrac{b}{a}-\dfrac{b+m}{a+m}=\dfrac{b(a+m)-a(b+m)}{a(a+m)}=\dfrac{(b-a)m}{a(a+m)}<0$，故

B项正确；若 $z_1=1+2i,z_2=2+i$，则 $|z_1|=|z_2|$，但 $z_1\neq z_2$ 且 $z_1\neq\bar{z}_2$，故C项错误；由题意，$x=\log_2 6,y=\log_3 6$，所以 $xy=\log_2 6\times\log_3 6=(1+\log_2 3)(1+\log_3 2)=1+\log_2 3+\log_3 2+\log_2 3\times\log_3 2>2+2\sqrt{\log_2 3\times\log_3 2}=4$，故D项正确. 故选BD项.

10. ABD 【解析】$\frac{1}{a}+\frac{a}{b}=\frac{a+b}{a}+\frac{a}{b}=1+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 1+2\sqrt{\frac{b}{a}\times\frac{a}{b}}=3$，当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时取等号，故A项正确；$\frac{a+2b+3}{ab}=\frac{a+2b+3(a+b)}{ab}=\frac{4a+5b}{ab}=\frac{4}{b}+\frac{5}{a}$，所以 $\frac{4}{b}+\frac{5}{a}=\left(\frac{4}{b}+\frac{5}{a}\right)(a+b)=9+\frac{4a}{b}+\frac{5b}{a}\geqslant 9+4\sqrt{5}$，当且仅当 $2a=\sqrt{5}b$，即 $a=5-2\sqrt{5},b=2\sqrt{5}-4$ 时取等号，故B项正确；$(a+1)(2b+1)=\frac{1}{2}(2a+2)(2b+1)\leqslant\frac{1}{2}\times\left(\frac{2a+2+2b+1}{2}\right)^2=\frac{25}{8}$，当且仅当 $2a+2=2b+1$，即 $a=\frac{1}{4},b=\frac{3}{4}$ 时取等号，故C项错误；因为 $a>0,b>0,a+b=1$，所以 $0<a<1$，$a^2+4b=a^2+4(1-a)=(a-2)^2$，在 $0<a<1$ 时，$(a-2)^2<(0-2)^2=4$，所以 $a^2+4b<4$，故D项正确. 故选ABD项.

11. AC 【解析】因为 $\frac{3\sin\alpha+2\cos\alpha}{2\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{3\tan\alpha+2}{2\tan\alpha-1}=\frac{8}{3}$，所以 $\tan\alpha=2$，所以 α 为第一象限角或第三象限角. 当 α 为第一象限角时，$\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5},\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$；当 α 为第三象限角时，$\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5},\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以 $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{2}{5}$，故A项正确；$\sin\alpha+\cos\alpha=\pm\frac{3\sqrt{5}}{5}$，故B项错误；$\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=-\frac{3}{5}$，故C项正确；$\cos\alpha\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}+\sin\alpha\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\cos\alpha\frac{1-\sin\alpha}{|\cos\alpha|}+\sin\alpha\frac{1-\cos\alpha}{|\sin\alpha|}$，当 α 为第一象限角时，原式 $=2-\sin\alpha-\cos\alpha=2-\frac{3\sqrt{5}}{5}$；当 α 为第三象限角时，原式 $=\sin\alpha+\cos\alpha-2=-\frac{3\sqrt{5}}{5}-2$，故D项错误. 故选AC项.

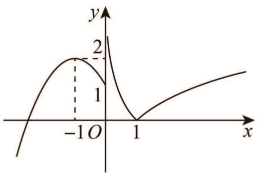
12. BCD 【解析】由题意，$f(x)$ 的最大值为1，最小值为 -3，所以有 $\begin{cases}-A-1=-3,\\ A-1=1,\end{cases}$ 解得 $A=2$，因为 $f(0)=2\sin\varphi-1=0$，$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，又 $\frac{T}{2}=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，所以 $T=\pi$，$\omega=2$，函数的解析式为 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-1$，故A项错误；令 $2x+\frac{\pi}{6}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得 $x=-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，所以当 $k=0$ 时，$f(x)$ 的图像关于点 $\left(-\frac{\pi}{12},-1\right)$ 对称，故B项正确；设切点为 $\left(x_0,2\sin\left(2x_0+\frac{\pi}{6}\right)-1\right)$，因为 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-1$，所以 $f'(x)=4\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，切线方程为 $y-\left[2\sin\left(2x_0+\frac{\pi}{6}\right)-1\right]=4\cos\left(2x_0+\frac{\pi}{6}\right)(x-x_0)$，所以 $\begin{cases}4\cos\left(2x_0+\frac{\pi}{6}\right)=-2\sqrt{3},\\ -x_0\cdot 4\cos\left(2x_0+\frac{\pi}{6}\right)+2\sin\left(2x_0+\frac{\pi}{6}\right)-1=\sqrt{3}\pi-2,\end{cases}$ 所以 $x_0=\frac{\pi}{2}$，满足题意，此时切点为 $\left(\frac{\pi}{2},-2\right)$，切线为 $2\sqrt{3}x+y-\sqrt{3}\pi+2=0$，故C项正确；令 $f(x)=0$，得 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$，此时 $x=k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 或 $x=k\pi+\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，所以 $n-m\geqslant\frac{2\,023-1}{2}\times\pi=1\,011\pi$，故D项正确. 故选BCD项.

三、填空题

13. $\frac{56}{67}$ 【解析】因为 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，所以 $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，$\tan\alpha=-\frac{3}{4}$，所以 $4\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)=\frac{3}{5}\cos\beta-\frac{4}{5}\sin\beta$，解得 $\tan\beta=-\frac{17}{4}$，所以 $\tan(\alpha-\beta)=\frac{-\frac{3}{4}+\frac{17}{4}}{1+\frac{3}{4}\times\frac{17}{4}}=\frac{56}{67}$.

14. $y=-3x$ 和 $y=24x-54$ 【解析】因为 $f(x)=x^3+(a-1)\cos x-3x$ 为奇函数，所以 $a=1$，$f(x)=x^3-3x$，$f'(x)=3x^2-3$，设切点 (x_0,y_0)，则切线方程为 $y-(x_0^3-3x_0)=(3x_0^2-3)(x-x_0)$，又切线过点 $(2,-6)$，代入解得 $x_0=0$ 或 $x_0=3$. 当 $x_0=0$ 时，切点为 $(0,0)$，切线方程为 $y=-3x$；当 $x_0=3$ 时，切点为 $(3,18)$，切线方程为 $y=24x-54$.

15. $(0,1]$【解析】由题意，$f(x)$的图像如图所示，因为$[f(x)]^2-(2m+1)f(x)+m^2+m=0$有 7 个不同实数解，设$f(x)=t$，则方程$t^2-(2m+1)t+m^2+m=0$有 2 个不等实根$t_1=m$，$t_2=m+1$且$0<t_1<1\leqslant t_2<2$或$1\leqslant t_1<2$，$t_2=2$. 当$1\leqslant t_1<2$，$t_2=2$时，$m=1$，满足题意；当$0<t_1<1\leqslant t_2<2$时，$0<m<1\leqslant m+1<2$，解得$m\in(0,1)$. 综上，$m\in(0,1]$.



16. $[e,+\infty)$【解析】因为$\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{x_1x_2}-\frac{e^{ax_2}}{e^{ax_1}}<0$，所以$\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{x_1x_2}<\frac{e^{ax_2}}{e^{ax_1}}$，所以$x_1x_2(\ln x_2-\ln x_1)<ax_2-ax_1$. 因为$0<x_1<x_2\leqslant e$，所以$x_1x_2>0$，所以$\ln x_2+\frac{a}{x_2}<\ln x_1+\frac{a}{x_1}$. 设$g(x)=\ln x+\frac{a}{x}$，则满足$g(x)$在$(0,e]$上单调递减，因为$g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{a}{x^2}=\frac{x-a}{x^2}$，所以$g(x)$在$(0,a]$上单调递减，在$[a,+\infty)$内单调递增，所以$a\geqslant e$，即$a$的取值范围为$[e,+\infty)$.

四、解答题

17. **解：**(1)$f(x)=\sqrt{2}\sin x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-m$

$$=\sqrt{2}\sin x\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)\right]-m$$

$$=\sin x\cos x-\sin^2 x-m$$

$$=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1-\cos 2x}{2}-m$$

$$=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}-m$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}-m.$$

因为$f(x)$的最大值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以$m=-\frac{1}{2}$，

所以$f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$， (2 分)

$f(x)$的最小正周期$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$. (3 分)

令$2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，

解得$x\in\left[k\pi+\frac{\pi}{8},k\pi+\frac{5\pi}{8}\right](k\in\mathbf{Z})$，

所以$f(x)$的单调递减区间为$\left[k\pi+\frac{\pi}{8},k\pi+\frac{5\pi}{8}\right](k\in\mathbf{Z})$. (5 分)

(2)将$f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$的图像向右平移$\frac{7\pi}{24}$个单位长度得到$y=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$的图像，再将横坐标缩短为原来的$\frac{1}{2}$，得到$g(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)$. (7 分)

若$g(x)\geqslant\frac{1}{2}$，则$\sin\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$，

令$2k\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant 4x-\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$，

解得$\frac{k\pi}{2}+\frac{7\pi}{48}\leqslant x\leqslant\frac{k\pi}{2}+\frac{13\pi}{48}(k\in\mathbf{Z})$. (9 分)

综上，满足$g(x)\geqslant\frac{1}{2}$的x的取值集合为$\left[\frac{k\pi}{2}+\frac{7\pi}{48},\frac{k\pi}{2}+\frac{13\pi}{48}\right](k\in\mathbf{Z})$. (10 分)

18. **解：**(1)因为$f\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=f\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$，

所以$x=\frac{\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}}{2}=\frac{\pi}{4}$是$f(x)$图像的对称轴.

令$\frac{\pi}{4}\omega+\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，

解得$\omega=4k+\frac{4}{3}(k\in\mathbf{Z})$. (2 分)

又$f(x)$在区间$\left[0,\frac{5\pi}{6}\right]$上只取得一次最大值，此时$\omega x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{6}\right]$，

所以$\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{6}\right]\subseteq\left[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right)$，

即$\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{5\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{2}$，解得$\omega\in\left[\frac{2}{5},\frac{14}{5}\right)$. (4 分)

当$k=0$时，$\omega=\frac{4}{3}$满足题意，$f(x)$的解析式为$f(x)=\sin\left(\frac{4}{3}x+\frac{\pi}{6}\right)$. (6 分)

(2)在$\triangle ABC$中，因为$f\left(\frac{3}{8}B\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以$\sin\left(\frac{1}{2}B+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $\frac{1}{2}B+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right)$，

所以 $\frac{1}{2}B+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$，$\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{3}}{4}ac=\sqrt{3}$，所以 $ac=4$. （10 分）

由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=(a+c)^2-3ac=2ac$，

所以 $(a+c)^2=5ac=20$，所以 $a+c=2\sqrt{5}$. （12 分）

19. 解：(1) 令 $y=\frac{a^x-1}{a^x+1}$，所以 $(a^x+1)y=a^x-1$，

所以 $a^x=\frac{y+1}{1-y}>0$，解得 $y\in(-1,1)$， （3 分）

所以 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)=\log_a\frac{x+1}{1-x}$，$x\in(-1,1)$. （4 分）

（不写定义域扣 2 分）

(2) 因为 $f^{-1}(x)=\log_a\frac{x+1}{1-x}(x\in(-1,1))$，

所以 $g(x)=2f^{-1}(x)+\log_a(1-x)=\log_a\frac{(x+1)^2}{1-x}$. （5 分）

设 $t=1-x\in\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right]$，所以 $x=1-t$，

所以 $\varphi(t)=\log_a\frac{(2-t)^2}{t}=\log_a\frac{t^2-4t+4}{t}=\log_a\left(t+\frac{4}{t}-4\right)$. （7 分）

设 $h(t)=t+\frac{4}{t}-4$，则 $h(t)$ 在区间 $\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right]$ 上单调递减，值域为 $\left[\frac{8}{3},\frac{9}{2}\right]$， （8 分）

当 $a>1$ 时，$\varphi(t)\in\left[\log_a\frac{8}{3},\log_a\frac{9}{2}\right]$，即 $g(x)\in\left[\log_a\frac{8}{3},\log_a\frac{9}{2}\right]$，所以 $\log_a\frac{8}{3}>\frac{1}{2}$，解得 $1<a<\frac{64}{9}$； （10 分）

当 $0<a<1$ 时，$\varphi(t)\in\left[\log_a\frac{9}{2},\log_a\frac{8}{3}\right]$，即 $g(x)\in\left[\log_a\frac{9}{2},\log_a\frac{8}{3}\right]$，所以 $\log_a\frac{9}{2}>\frac{1}{2}$，解得 $a>\frac{81}{4}$（舍）.

综上，a 的取值范围为 $\left(1,\frac{64}{9}\right)$. （12 分）

20. 解：(1) 由题意，$\frac{2\sin A+\sin B}{\sin 2B}=\frac{c}{b}$，

所以 $\frac{2\sin A+\sin B}{\sin 2B}=\frac{\sin C}{\sin B}$，

所以 $\frac{2\sin A+\sin B}{2\sin B\cos B}=\frac{\sin C}{\sin B}$，

所以 $2\sin A=2\cos B\sin C-\sin B$. （1 分）

因为 $A+B+C=\pi$，

所以 $\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$，

所以 $2\sin B\cos C+2\cos B\sin C=2\cos B\sin C-\sin B$，

即 $(2\cos C+1)\sin B=0$.

因为 $\sin B\neq0$，所以 $\cos C=-\frac{1}{2}$， （2 分）

又 $C\in(0,\pi)$，所以 $C=\frac{2\pi}{3}$. （3 分）

选择①.

若 CM 为 $\triangle ABC$ 的中线，设 $AM=BM=x(x>0)$，

所以 $\cos\angle CMA=\frac{x^2+1-4}{2x}$，$\cos\angle BMC=\frac{x^2+1-BC^2}{2x}$，

因为 $\cos\angle CMA+\cos\angle CMB=0$，

所以 $BC^2=2x^2-2$，所以 $x>1$， （4 分）

$\cos\angle ACB=\frac{2^2+BC^2-4x^2}{2\times2\times BC}=-\frac{1}{2}$，

解得 $x^2=1$（舍）或 $x^2=3$，

所以 $AB=2\sqrt{3}$. （6 分）

选择②.

若 CM 为 $\triangle ABC$ 的角平分线，则 $\angle ACM=\angle BCM=\frac{\pi}{3}$，

在 $\triangle ACM$ 中，由余弦定理得 $AM^2=2^2+1^2-2\times2\times1\times\cos\frac{\pi}{3}=3$，所以 $AM=\sqrt{3}$， （4 分）

又 $AM^2+CM^2=AC^2$，所以 $CM\perp AB$.

在 $\text{Rt}\triangle CMB$ 中，求得 $BM=\sqrt{3}$，

所以 $AB=2\sqrt{3}$. （6 分）

选择③.

若 CM 为 $\triangle ABC$ 的高线，则 $\cos\angle CMA=\cos\angle BMC=\frac{\pi}{2}$，

因为 $AM^2=AC^2-CM^2=3$，所以 $AM=\sqrt{3}$. （4 分）

所以 $\angle ACM=\frac{\pi}{3}$，所以 $\angle BCM=\frac{\pi}{3}$，

所以 $BM=\sqrt{3}$，所以 $AB=AM+BM=2\sqrt{3}$. （6 分）

(2) 设 $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 R，

由正弦定理可得 $\frac{AB}{\sin\frac{2\pi}{3}}=2R$，解得 $R=2$，

所以 $S_1=4\pi$. （8 分）

由题意，$BC=2$，所以 $\triangle ABC$ 的周长 $L=4+2\sqrt{3}$，

$\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times1=\sqrt{3}$.

设 $\triangle ABC$ 内切圆的半径为 r,

则 $\frac{1}{2}rL=S_{\triangle ABC}$,解得 $r=2\sqrt{3}-3$, (10分)

$S_2=(2\sqrt{3}-3)^2\pi=(21-12\sqrt{3})\pi$, (11分)

所以 $S_1-S_2=(12\sqrt{3}-17)\pi$. (12分)

21. 解:(1)因为 $f(x)=ax\ln x-bx+1(a,b\in\mathbf{R},ab\neq0)$,

所以 $f'(x)=a(\ln x+1)-b$,

又 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值 -1,

所以 $f(1)=-1,f'(1)=0$,

即 $\begin{cases}f(1)=-b+1=-1,\\ f'(1)=a-b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\ b=2,\end{cases}$

所以 $f(x)=2x\ln x-2x+1$.

此时 $f'(x)=2\ln x$, (1分)

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调递减,在 $(1,+\infty)$ 内单调递增,

$f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值 -1,满足题意.

综上,$f(x)$ 的解析式为 $f(x)=2x\ln x-2x+1$. (2分)

(2)当 $a=b$ 时,$f(x)=ax\ln x-ax+1(a\neq0)$,$f'(x)=a\ln x$.

①当 $a>0$ 时,$f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 内单调递减,在 $(1,3)$ 内单调递增,所以 $f(x)$ 的最小值为 $f(1)=1-a$.

又 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)a+1$,$f(3)=(3\ln3-3)a+1$,

所以 $f(3)-f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(3\ln3-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}\right)a-\frac{5}{2}a=\left(\ln27\sqrt{2}-\frac{5}{2}\right)a>0$,

故 $f(x)$ 的最大值为 $f(3)=(3\ln3-3)a+1$; (5分)

②当 $a<0$ 时,$f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 内单调递增,在 $(1,3)$ 内单调递减,所以 $f(x)$ 的最大值为 $f(1)=1-a$,

此时 $f(3)-f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(3\ln3-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}\right)a-\frac{5}{2}a=\left(\ln27\sqrt{2}-\frac{5}{2}\right)a<0$,

故 $f(x)$ 的最小值为 $f(3)=(3\ln3-3)a+1$. (7分)

综上,当 $a>0$ 时,$f(x)$ 在区间 $\left[\frac{1}{2},3\right]$ 上的最小值为 $f(1)=1-a$,最大值为 $f(3)=(3\ln3-3)a+1$;当 $a<0$ 时,$f(x)$ 在区间 $\left[\frac{1}{2},3\right]$ 上的最大值为 $f(1)=1-a$,最小值为 $f(3)=(3\ln3-3)a+1$. (8分)

(3)当 $a>0$ 且 $b=1$ 时,$f(x)=ax\ln x-x+1$,$f'(x)=a\ln x+a-1$.

令 $f'(x)=0$,解得 $x=e^{\frac{1-a}{a}}$,所以 $f(x)$ 在 $(0,e^{\frac{1-a}{a}})$ 内单调递减,在 $(e^{\frac{1-a}{a}},+\infty)$ 内单调递增.

①当 $a\geqslant1$ 时,$e^{\frac{1-a}{a}}\leqslant1$,$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 内单调递增,所以 $f(x)>f(1)=0$; (9分)

②当 $0<a<1$ 时,$e^{\frac{1-a}{a}}>1$,$f(x)$ 在 $(1,e^{\frac{1-a}{a}})$ 内单调递减,在 $(e^{\frac{1-a}{a}},+\infty)$ 内单调递增,所以 $f(e^{\frac{1-a}{a}})<f(1)=0$,不满足题意.

综上,a 的取值范围为 $[1,+\infty)$. (12分)

(若分离变量后使用洛必达法则,扣2分)

22. 证明:(1)解法一:因为 $f(x)=\sin x+x-2\ln(x+1)$,

所以 $f'(x)=\cos x+1-\frac{2}{x+1}$,且 $f(0)=0,f'(0)=0$. (1分)

当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时,设 $g(x)=f'(x)=\cos x+1-\frac{2}{x+1}$,

$g'(x)=-\sin x+\frac{2}{(x+1)^2}$,

易知 $g'(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调递减,$g'(0)=2>0$,

$g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1+\frac{2}{\left(\frac{\pi}{2}+1\right)^2}<0$, (2分)

所以 $\exists x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,使得 $g'(x_0)=0$,此时 $g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 内单调递增,在 $\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调递减, (3分)

又 $g(0)=0$,$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-\frac{2}{\frac{\pi}{2}+1}>0$,$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调递增,所以 $f(x)>f(0)=0$.

综上,当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时,$f(x)>0$ 得证. (4分)

解法二:设 $h(x)=x-\ln(x+1)(x>0)$,

则 $h'(x)=1-\frac{1}{x+1}=\frac{x}{x+1}>0$,

所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递增,

所以 $h(x)>h(0)=0$,即 $x>\ln(x+1)$. (1分)

由题意,$f(x)=\sin x+x-2\ln(x+1)>\sin x-\ln(x+1)$,

只需证 $\sin x-\ln(x+1)>0$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内恒成立.

设 $m(x)=\sin x-\ln(x+1)$，$m'(x)=\cos x-\frac{1}{x+1}$，

设 $n(x)=m'(x)$，$n'(x)=-\sin x+\frac{1}{(x+1)^2}$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调递减，

$n'(0)=1>0$，$n'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1+\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}+1\right)^2}<0$，

$\exists x_1\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，使得 $n'(x_1)=0$，

所以 $m'(x)$ 在区间 $(0,x_1)$ 内单调递增，在区间 $\left(x_1,\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调递减，

又 $m'(0)=0$，$m'(x_1)>0$，$m'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{\frac{\pi}{2}+1}<0$，

$\exists x_2\in\left(x_1,\frac{\pi}{2}\right)$，使得 $m'(x_2)=0$，

所以 $m(x)$ 在区间 $(0,x_2)$ 内单调递增，在区间 $\left(x_2,\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调递减. （3 分）

因为 $m(0)=0$，$m\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-\ln\left(\frac{\pi}{2}+1\right)>0$，

所以 $\sin x>\ln(x+1)$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内恒成立.

综上，当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$f(x)>0$ 得证. （4 分）

(2)因为 $n\in\mathbf{N}^*$，所以 $0<\frac{1}{2n}\leqslant\frac{1}{2}$，

由(1)可得 $\sin x>\ln(x+1)$. （5 分）

（若选择解法一证明，则还需再证 $\sin x>\ln(x+1)$，证明过程详见解法二）

令 $x=\frac{1}{2n}$，所以 $\sin\frac{1}{2n}>\ln\left(\frac{1}{2n}+1\right)=\ln\frac{2n+1}{2n}$，

所以 $\sin\frac{1}{2}>\ln\frac{3}{2}$，$\sin\frac{1}{4}>\ln\frac{5}{4}$，$\sin\frac{1}{6}>\ln\frac{7}{6}$，…，$\sin\frac{1}{2n}>\ln\frac{2n+1}{2n}$，

所以 $\sin\frac{1}{2}+\sin\frac{1}{4}+\cdots+\sin\frac{1}{2n}>\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{5}{4}+\cdots+\ln\frac{2n+1}{2n}$. （8 分）

对 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，$\frac{2n+1}{2n}-\frac{2n+2}{2n+1}=\frac{1}{2n(2n+1)}>0$，

所以 $\ln\frac{2n+1}{2n}>\ln\frac{2n+2}{2n+1}$，

所以 $2\left(\sin\frac{1}{2}+\sin\frac{1}{4}+\cdots+\sin\frac{1}{2n}\right)>2\left(\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{5}{4}+\cdots+\ln\frac{2n+1}{2n}\right)>\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\ln\frac{5}{4}+\ln\frac{6}{5}+\cdots+\ln\frac{2n+1}{2n}+\ln\frac{2n+2}{2n+1}=\ln 3-\ln 2+\ln 4-\ln 3+\cdots+\ln(2n+2)-\ln(2n+1)=\ln(n+1)$，

所以 $\sin\frac{1}{2}+\sin\frac{1}{4}+\cdots+\sin\frac{1}{2n}>\frac{1}{2}\ln(n+1)$ 得证. （10 分）

设 $p(x)=\sin x-x\left(0<x\leqslant\frac{1}{2}\right)$，则 $p'(x)=\cos x-1<0$，$p(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{1}{2}\right]$ 上单调递减，

所以 $p(x)=\sin x-x<p(0)=0$.

令 $x=\frac{1}{2n}$，$\sin\frac{1}{2n}<\frac{1}{2n}$，所以 $\sin\frac{1}{2}<\frac{1}{2}$，$\sin\frac{1}{4}<\frac{1}{4}$，

所以 $\sin\frac{1}{6}<\frac{1}{6}$，…，$\sin\frac{1}{2n}<\frac{1}{2n}$，

所以 $\sin\frac{1}{2}+\sin\frac{1}{4}+\cdots+\sin\frac{1}{2n}<\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$.

综上，$\frac{1}{2}\ln(n+1)<\sin\frac{1}{2}+\sin\frac{1}{4}+\cdots+\sin\frac{1}{2n}<\frac{1}{2}\times\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)(n\in\mathbf{N}^*)$. （12 分）

辽宁省名校联盟2023年高三10月份联合考试

数学

题号	题型	分值	考查的主要内容及知识点	难度
1	选择题	5	集合的运算及不等式的解法	易
2	选择题	5	复数的运算	易
3	选择题	5	命题的否定及一元二次不等式的应用	中
4	选择题	5	复合函数单调性	中
5	选择题	5	三角形形状判断及充分必要条件	中
6	选择题	5	弧度制及扇形的面积公式	中
7	选择题	5	三次函数的极值最值	中难
8	选择题	5	函数单调性及不等式解法	难
9	选择题	5	方程组解法、不等式性质、指对运算、复数	易
10	选择题	5	均值不等式及其应用	中
11	选择题	5	同角基本关系式及三角恒等变换	中难
12	选择题	5	三角函数图像及性质	难
13	填空题	5	两角和差公式	易
14	填空题	5	函数奇偶性及切线方程	中
15	填空题	5	分段函数方程及含参二次方程解法	中难
16	填空题	5	构造法及换元法在求函数中的应用	难
17	解答题	10	三角函数的图像变换及性质	易
18	解答题	12	三角函数的对称性及最值、余弦定理	中
19	解答题	12	反函数及指对函数的最值	中
20	解答题	12	正、余弦定理的综合应用	中难
21	解答题	12	函数的解析式、导数极值最值及函数不等式恒成立	难
22	解答题	12	利用导数证明不等式及数列不等式的证明	难

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。