

数 学

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分。共4页,总分150分,考试时间120分钟。

第Ⅰ卷(选择题 共60分)

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

- 书架的第1层放有4本不同的计算机书,第2层放有3本不同的文艺书,第3层放有2本不同的体育书,从书架上任取1本书,有()种不同取法;从书架的第1层、第2层、第3层各取1本书,有()种不同取法。
A. 9,20 B. 20,9 C. 9,24 D. 24,9
- 下列函数中,不存在极值点的是
A. $y=x+\frac{1}{x}$ B. $y=2^{|x|}$ C. $y=x \cdot \ln x$ D. $y=-2x^3-x$
- 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,若 $a_5+a_6=a_2+4$,则 $S_{17}=\$
A. 4 B. 68 C. 136 D. 272
- 若存在过点 $(0,-2)$ 的直线与曲线 $y=x^3$ 和曲线 $y=x^2-x+a$ 都相切,则实数 a 的值是
A. 2 B. 1 C. 0 D. -2
- 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0, b>0)$ 的右焦点为 F ,过点 F 作圆 $x^2+y^2=b^2$ 的切线,若两条切线互相垂直,则双曲线 C 的离心率为
A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. 3
- “三分损益法”是古代中国制定音律时所用的生律法,三分损益包含“三分损一”“三分益一”。取一段弦,“三分损一”即均分弦为三段,舍一留二,便得到 $\frac{2}{3}$ 弦,“三分益一”即弦均分三段后再加一段,便得到 $\frac{4}{3}$ 弦,以宫为第一个音,依次按照损益的顺序,得到四个音,这五个音的音高从低到高依次是宫、商、角、徵、羽,合称“五音”。已知声音的音高与弦长是成反比的,那么所得四音生成的顺序是
A. 徵、商、羽、角 B. 徵、羽、商、角
C. 商、角、徵、羽 D. 角、羽、商、徵
- 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上存在导数 $f'(x)$,对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 有 $f'(x) > x$.若 $f(1-k)-f(k) \geq \frac{1}{2}-k$,则 k 的取值范围是
A. $(-\infty, 0]$ B. $(-\infty, \frac{1}{2}]$ C. $(0, \frac{1}{2}]$ D. $[\frac{1}{2}, 1]$

第1页(共4页)

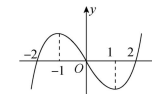
- 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+2x, & x \leq 0, \\ \ln \frac{1}{x}, & x > 0. \end{cases}$ 若函数 $g(x)=f(x)-a|x|$ 恰有三个零点,则实数 a 的取值范围是
A. $(-2, -\frac{1}{e}) \cup [0, +\infty)$
B. $[-2, -\frac{1}{e}] \cup (0, +\infty)$
C. $(-e, 0) \cup [2, +\infty)$
D. $\{-\frac{1}{e}\} \cup [0, +\infty)$

值范围是

- $(-2, -\frac{1}{e}) \cup [0, +\infty)$
- $[-2, -\frac{1}{e}] \cup (0, +\infty)$
- $(-e, 0) \cup [2, +\infty)$
- $\{-\frac{1}{e}\} \cup [0, +\infty)$

二、选择题:本题共4小题,每小题5分,共20分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得5分,有选错的得0分,部分选对的得2分。

- 已知在 $\mathbf{R}$ 上可导的函数 $f(x)$ 的图象如图所示, $f'(x)$ 为函数 $f(x)$ 的导函数,则下列区间是不等式 $x \cdot f'(x) < 0$ 解集的子区间的是



- $(-\infty, -1)$
 - $(-1, 0)$
 - $(0, 1)$
 - $(1, +\infty)$
- 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1=1$, $S_{n+1}=S_n+2a_n+1$,数列 $\{\frac{2^n}{a_n a_{n+1}}\}$ 的前 n 项和为 T_n ,下列结论正确的是
A. $\{a_n+1\}$ 是等差数列 B. $\{a_n+1\}$ 是等比数列
C. $a_n=2^n-1$ D. $T_n < 1$
 - 阿基米德是古希腊伟大的物理学家、数学家、天文学家,不仅在物理学方面贡献巨大,还享有“数学之神”的称号.抛物线上任意两点 A, B 处的切线交于点 P ,称 $\triangle PAB$ 为“阿基米德三角形”.已知抛物线 $C: x^2=8y$ 的焦点为 F ,过 A, B 两点的直线的方程为 $\sqrt{3}x-3y+6=0$,关于“阿基米德三角形” $\triangle PAB$,下列结论正确的是
A. $|AB|=\frac{32}{3}$ B. $PA \perp PB$
C. 点 P 的坐标为 $(\sqrt{3}, -2)$ D. $PF \perp AB$
 - 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$,其导函数为 $f'(x)$,当 $x \geq 0$ 时, $f'(x)+\sin 2x < 0$,则
A. $f(0)=0$
B. 函数 $y=f(x)-x$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递减
C. 不等式 $f(x)-f(x+\frac{\pi}{2}) < \cos 2x$ 的解集为 $(-\infty, -\frac{\pi}{4})$
D. 不等式 $f(x)-f(x+\frac{\pi}{2}) < \cos 2x$ 的解集为 $(-\frac{\pi}{4}, +\infty)$

第2页(共4页)

第Ⅱ卷(非选择题 共 90 分)

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。

13. 已知函数 $f(x) = ax^3 + bx + 1$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $4x - y - 1 = 0$, 则 $ab =$ _____.
14. 为了进一步做好社区疫情防控工作,从医疗小组的 2 名医生、4 名护士中任意选出 2 人分别担任组长和副组长,则有 _____ 种不同的选法.
15. 已知 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $a_1 = 1$, $S_n + S_{n-1} = n^2 + 2(n \geq 2)$, 则 $S_{21} =$ _____.
16. 已知函数 $f(x) = e^{ax} - 2\ln x - x^2 + ax$, 若 $f(x) > 0$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围为 _____.

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

设函数 $f(x) = a \ln x + \frac{1}{x} - 3x + 1$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处取得极值.

- (1) 求 a 的值;
- (2) 求函数 $f(x)$ 的极值点.

18. (12 分)

已知定点 $O_2(2, 0)$, 点 P 为圆 $O_1: (x+2)^2 + y^2 = 32$ (O_1 为圆心) 上一动点, 线段 O_2P 的垂直平分线与直线 O_1P 交于点 G .

- (1) 设点 G 的轨迹为曲线 C , 求曲线 C 的方程;
- (2) 若过点 O_2 且不与 x 轴重合的直线 l 与 (1) 中曲线 C 交于 D, E 两点, 当 $\overrightarrow{O_1D} \cdot \overrightarrow{O_1E}$ 取最大值时, 求 $\triangle O_1DE$ 的面积.

19. (12 分)

已知递增的等差数列 $\{a_n\}$, 其前 n 项和为 S_n , $b_n = \frac{a_n}{2^n}$, 从 ① $a_4 + a_5 = 8$, ② $a_3 a_6 = \frac{55}{4}$, ③ $S_{10} =$

50 中选出两个作为条件, 求数列 $\{b_n\}$ 的最大项.

注: 如果选择多个条件分别解答, 则按第一个解答计分.

20. (12 分)

已知函数 $f(x) = 2\sin x - x \cos x - x$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数.

- (1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $A(0, f(0))$ 处的切线方程;
- (2) $g(x) = x^2 - 2x + a$ ($a \in \mathbf{R}$), 若对任意 $x_1 \in [0, \pi]$, 均存在 $x_2 \in [1, 2]$, 使得 $f(x_1) > g(x_2)$, 求实数 a 的取值范围.

21. (12 分)

已知函数 $f(x) = e^{x-2} - a \ln(x-1)$.

- (1) 当 $a = 1$ 时, 研究 $f(x)$ 的单调性;
- (2) 令 $g(x) = \frac{x}{f(x+2) + a \ln(x+1)}$, 若存在 $x_1 < x_2$, 使得 $g(x_1) = g(x_2)$, 证明: $\ln x_2 - \ln(1-x_1) > \ln 3$.

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = a e^{2x} + (a-2)e^x - x$ ($a \in \mathbf{R}$).

- (1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
- (2) 若 $f(x)$ 有两个零点, 求 a 的取值范围.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：
www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：[zizzsw](https://www.zizzs.com)。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线