华大新高考联盟 2021 届高三 1 月教学质量测评

理科数学

命题：华中师范大学考试研究院

本试题卷共 4 页，23 题(含选考题)。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若集合 $A=\{x|(2x-3)(x+4)<0\}$，$B=\{x|x>0\}$，则 $A\cup(\complement_R B)=$

A. $\{x|-4<x\leqslant 0\}$　　B. $\{x|x\leqslant -4$ 或 $x>0\}$

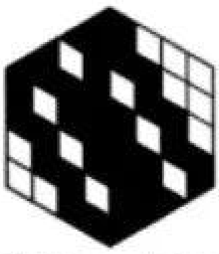
C. $\{x|x>4\}$　　D. $\left\{x\middle|x<\dfrac{3}{2}\right\}$

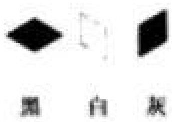
2. 若在复平面内，复数 $3-2i$，$1-2i$，$2+i$ 所对应的点分别为 A，B，C，则$\triangle ABC$ 的面积为

A. 6　　B. 4　　C. 3　　D. 2

3. 世界著名的数学杂志《美国数学月刊》于 1989 年曾刊登过一个红极一时的棋盘问题. 题中的正六边形棋盘，用三种全等(仅朝向和颜色不同)的菱形图案全部填满(如图)，向棋盘内随机投掷 3 点，则至少 2 点落在灰色区域内的概率为

A. $\dfrac{13}{27}$　　B. $\dfrac{7}{27}$　　C. $\dfrac{2}{3}$　　D. $\dfrac{20}{27}$



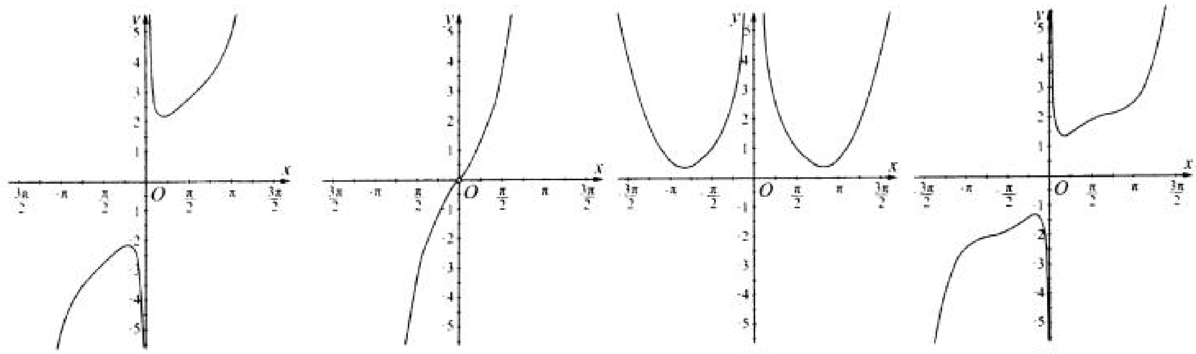


4. 已知母线长为 2 的圆柱 O_1O_2 的体积为 2π，点 M，N 分别是圆 O_1，O_2 上的点，且 $O_1M\perp O_2N$，则直线 MN 与圆柱底面所成角的正弦值为

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

C. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　　D. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

5. 函数 $f(x)=\dfrac{3^{|x|}}{2x}+\sin x$ 的图像大致为



A　　B　　C　　D

6. 已知正六边形 $ABCDEF$ 中，点 G 是线段 DE 的中点，则 $\overrightarrow{FG}=$

A. $\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}-\frac{3}{4}\overrightarrow{CA}$　　B. $\frac{1}{6}\overrightarrow{BD}-\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$

C. $\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}-\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$　　D. $\frac{1}{6}\overrightarrow{BD}-\frac{3}{4}\overrightarrow{CA}$

7. 已知矩形 $ABCD$ 中，$AB=8$，取 AB，CD 的中点 E，F，沿直线 EF 进行翻折，使得二面角 $A-EF-B$ 的大小为 120°，若翻折以后点 A，B，C，D，E，F 均在球 O 的表面上，且球 O 的表面积为 80π，则 $BC=$

A. 6　　B. 2　　C. 4　　D. 3

8. "提丢斯数列"，是由 18 世纪德国数学家提丢斯给出，具体如下：0，3，6，12，24，48，96，192，…，容易发现，从第 3 项开始，每一项是前一项的 2 倍；将每一项加上 4 得到一个数列：4，7，10，16，28，52，100，196，…；再将每一项除以 10 后得到"提丢斯数列"：0.4，0.7，1.0，1.6，2.8，5.2，10.0，…，则下列说法中，正确的是

A. "提丢斯数列"是等比数列　　B. "提丢斯数列"的第 99 项为 $\frac{3\cdot 2^{98}+4}{10}$

C. "提丢斯数列"前 31 项和为 $\frac{3\cdot 2^{30}}{10}+\frac{121}{10}$　　D. "提丢斯数列"中，不超过 20 的有 9 项

9. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}3^x, 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 3-\log_2 x, 1<x\leqslant 32,\end{cases}$ 函数 $F(x)=x(2x-1)$，若 $y=F[f(x)]$ 的图像与直线 $y=m$ 有 3 个交点，则实数 m 的值可能为

A. -6　　B. 9　　C. -12　　D. 12

10. 已知直线 $l:2x-y+4=0$ 与 y 轴交于点 M，抛物线 $C:x^2=2py(p\in(0,3))$ 的准线为 l'，点 A 在抛物线 C 上，点 B 在 l' 上，且 $AB\perp l'$，$\angle ABM=\angle AMB$，$\angle MAB=120^\circ$，则 $p=$

A. $\frac{6}{7}$　　B. $\frac{12}{7}$　　C. $\frac{4}{5}$　　D. $\frac{8}{5}$

11. 已知函数 $f(x)=\sin(3x-\varphi)\left(0<\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增，现有如下三个结论：

①φ 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$；

②当 φ 取得最大值时，将函数 $f(x)$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{18}$ 个单位后，再把曲线上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍，得到函数 $g(x)$ 的图像，则 $g\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$；

③函数 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上有个 6 个零点.

则上述结论正确的个数为

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

12. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，点 M，N 分别在双曲线 C 的左、右两支上，点 A 在 x 轴上，且 M，N，F_1 三点共线，若 $\overrightarrow{AN}=3\overrightarrow{F_2M}$，$\angle F_1NF_2=\angle ANF_2$，则双曲线 C 的离心率为

A. $\sqrt{5}$ B. $\sqrt{7}$ C. 3 D. $\sqrt{11}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 若实数 x，y 满足 $\begin{cases}3x-y-4\leqslant 0,\\ x-y+1\geqslant 0,\\ y+2\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=3x-5y$ 的最大值为________.

14. 已知 $(2x^2-1)^6=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_{11}x^{11}+a_{12}x^{12}$，则 $a_6+a_7+a_8=$________.

15. 已知 $\alpha,\beta\in[0,\pi]$，$\cos\alpha+\cos\beta=\frac{3}{5}$，$\cos\alpha\cos\beta=-\frac{1}{5}$，则 $\sin\alpha\sin\beta=$________.

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=-\frac{1}{2}$，$a_2=1$，数列 $\{a_n\}$ 的奇数项单调递增，偶数项单调递减，若 $\frac{|a_{n+1}-a_n|}{2n+1}=1$，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

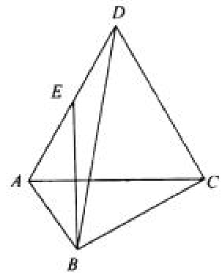
（一）必考题：共 60 分。

17.（12 分）

已知平面四边形 $ABCD$ 如图所示，其中 $AB\perp BC$，$\angle ACB=\frac{1}{2}\angle DAC=\theta$，$\angle ADC=60°$.

（1）若 $\theta=30°$，$BC=3$，点 E 为线段 AD 的中点，求 BE 的值；

（2）若 $\frac{DC}{AB}=\sqrt{3}$，求 $\cos 2\theta$ 的值.

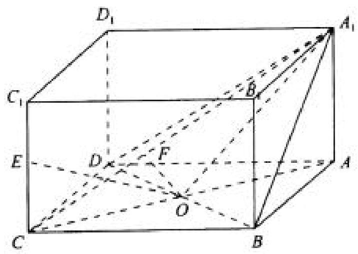


18.（12 分）

如图所示，直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 为菱形，线段 AC 与 BD 交于点 O，E 为线段 CC_1 的中点.

（1）若点 F 在线段 A_1C 上，且 $\angle FOA_1=90°$，求证：$OF\perp A_1B$；

（2）若 $3AB=4AA_1$，$\angle ABC=120°$，求直线 EO 与平面 A_1CD 所成角的正弦值.

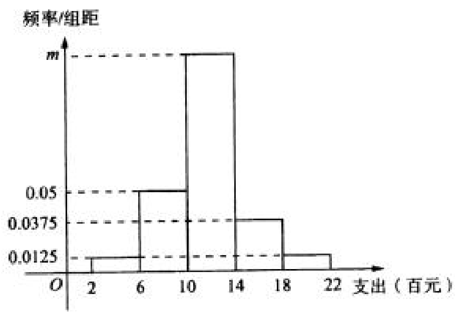


19.（12 分）

教育部官方数据显示，2020 届大学毕业生达到 844 万，根据相关调查，位于大城市的应届毕业生毕业后，有 30% 会留在该城市进行就业，于是租房便成为这些毕业生的首选. 为了了解应届毕业生房租支出的费用，研究人员对部分毕业生进行相关调查，所得数据如下图所示.

（1）求 m 的值以及房租支出的平均值 $\bar{x}$；

（2）为了了解应届生选择租房时考虑的主要因素，研究人员作出调查，所得数据如下表所示，判断是否有 99.9% 的把握认为



性别与选择租房时考虑的主要因素具有相关性.

	以距离上班地点的远近作为主要考虑因素	以房租的高低作为主要考虑因素
男性	500	300
女性	300	400

(3)由频率分布直方图,可近似地认为 A 城市应届毕业生房租支出服从正态分布 $N(\mu,3.2^2)$,若 2020 年该市区的应届毕业生共有 100 万人,试根据本题信息估计毕业后留在该市且房租支出介于 8.6 百元到 21.4 百元之间的毕业生人数.

附:参考公式:$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

参考数据:

$P(K^2\geqslant k)$	0.100	0.050	0.010	0.001
k	2.706	3.841	6.635	10.828

$P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)\approx0.6827$,$P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)\approx0.9544$,$P(\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma)\approx0.9973$

20.(12 分)

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为 F_1,F_2,点 A 在椭圆上运动,$\triangle AF_1F_2$ 面积的最大值为$\sqrt{3}$,且当 $AF_1\perp F_1F_2$ 时,$|AF_1|=\dfrac{3}{2}$.

(1)求椭圆 C 的方程;

(2)延长直线 AF_1 与椭圆 C 交于点 B,若$|F_1A|\cdot|F_1B|=\lambda|AB|$,求 λ 的值.

21.(12 分)

已知函数 $f(x)=a\ln x-x^2-x$.

(1)讨论函数 $f(x)$的单调性;

(2)若 $a=-1$,函数 $F(x)=f(x)+x+1$,且 $\forall m,n\in(0,+\infty)$,$m\neq n$,$|mF(n)-nF(m)|>\lambda mn|m-n|$,求实数 λ 的取值范围.

(二)选考题:共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答,如果多选,则按所做的第一题计分。

22.(10 分)[选修 4—4:坐标系与参数方程]

已知极坐标系中,直线 l 的极坐标方程为$\rho\cos\theta=4$,以极点为原点,极轴所在直线为 x 轴的非负半轴建立平面直角坐标系 xOy,曲线 C 的参数方程为$\begin{cases}x=2\cos2\varphi,\\y=2+4\sin\varphi\cos\varphi,\end{cases}$($\varphi$ 为参数).

(1)求直线 l 的直角坐标方程以及曲线 C 的极坐标方程;

(2)过原点且倾斜角为 $\alpha(\alpha\in[0,\pi))$的直线 l'与直线 l 交于点 M,与曲线 C 交于 O,N 两点,若$|ON|=\lambda|OM|$,求实数 λ 的最大值.

23.(10 分)[选修 4—5:不等式选讲]

已知函数 $f(x)=|x+1|-\left|x-\dfrac{3}{2}\right|$.

(1)求不等式 $f(x)\geqslant3x$ 的解集;

(2)若存在 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$,使得 $f(x_1)+|2x_2-m|+|2x_2+1|=0$,求实数 m 的取值范围.

机密★启用前(全国卷理科数学)

华大新高考联盟2021届高三1月教学质量测评

理科数学参考答案和评分标准

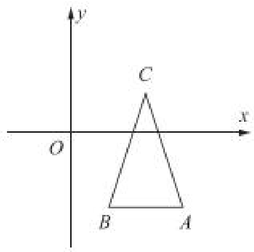
一、选择题

1.【答案】D

【命题意图】本题考查集合的运算、一元二次不等式的解法,考查考生数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意,$A=\{x|(2x-3)(x+4)<0\}=\left\{x\middle|-4<x<\frac{3}{2}\right\}$,$\complement_{R}B=\{x|x\leqslant 0\}$,故$A\cup(\complement_{R}B)=\left\{x\middle|x<\frac{3}{2}\right\}$,故选D.

2.【答案】C



【命题意图】本题考查复数的几何意义,考查考生直观想象的核心素养.

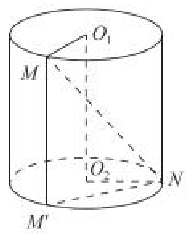
【解析】依题意,$A(3,-2)$,$B(1,-2)$,$C(2,1)$,在复平面内作出$\triangle ABC$的图形如图所示;观察可知,$\triangle ABC$的面积为$\frac{1}{2}\times 2\times 3=3$,故选C.

3.【答案】B

【命题意图】本题考查数学文化、古典概型、独立重复试验的概率,考查考生数学建模、数学运算的核心素养.

【解析】由图可知,棋盘共计48个菱形,其中有16个灰色的菱形,故向棋盘内随机投掷1个点,落在灰色区域内的概率为$\frac{1}{3}$;则至少2点落在灰色区域内的概率$P=C_3^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{7}{27}$,故选B.

4.【答案】C



【命题意图】本题考查空间几何体的体积、空间角的运算,考查考生数学运算、直观想象的核心素养.

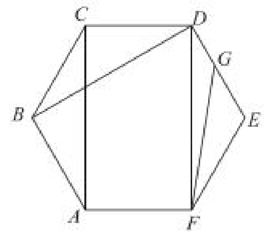
【解析】作出图形如图所示,则$\pi\cdot r^2\cdot l=2\pi$,解得$r=1$;过点M作MM'垂直于下底面,垂足为M',则$MM'=2$,$NM'=\sqrt{2}$,故直线MN与圆柱底面的成角的正弦值$\sin\theta=\sin\angle MNM'=\frac{|MM'|}{|MN|}=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$,故选C.

5.【答案】A

【命题意图】本题考查函数的图像与性质,考查考生直观想象、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意,$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,$f(-x)=\frac{3^{|-x|}}{2\cdot(-x)}+\sin(-x)=-f(x)$,故函数$f(x)$为奇函数,图像关于原点对称,排除C;$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3^{\frac{\pi}{2}}}{\pi}+1>2$,排除D;当$x$的值从$x$轴的正方向接近0时,$f(x)$接近$+\infty$,排除B;故选A.

6.【答案】B

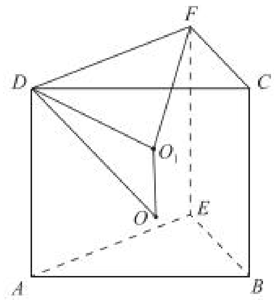


【命题意图】本题考查平面向量的基本定理,考查考生直观想象、逻辑推理的核心素养.

【解析】作出图形如图所示,则$\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{DG}=-\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}=-\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

$=-\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}\right)=\frac{1}{6}\overrightarrow{BD}-\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$，故选 B.

7.【答案】C



【命题意图】本题考查空间几何体的结构特征、球的表面积公式，考查考生数学运算、直观想象的核心素养.

【解析】作出图形如图所示，记△CDF 的外接圆圆心为 O_1，则 $FO_1=\frac{DF}{2\sin\angle DCF}=4$，故 $DO=\sqrt{DO_1^2+OO_1^2}=\sqrt{16+OO_1^2}$，而球 O 的表面积 $S=4\pi\cdot DO^2=4\pi\cdot(\sqrt{16+OO_1^2})^2=80\pi$，故 $OO_1=2$，则 $BC=4$，故选 C.

8.【答案】C

【命题意图】本题考查数学文化、等比数列的通项公式与前 n 项和公式、分组求和法，考查考生数学运算、逻辑推理、数学建模的核心素养.

【解析】记"提丢斯数列"为数列 $\{a_n\}$，则当 $n\geqslant 3$ 时，$10a_n-4=6\cdot 2^{n-3}$，解得 $a_n=\frac{3\cdot 2^{n-2}+4}{10}$，易知当 $n=2$ 时，$a_2=0.7$，符合该式，当 $n=1$ 时，$a_1=0.55\neq 0.4$，

故 $a_n=\begin{cases}0.4, n=1,\\ \frac{3\cdot 2^{n-2}+4}{10}, n\geqslant 2,\end{cases}$ 故 A 错误，而 $a_{99}=\frac{3\cdot 2^{97}+4}{10}$，故 B 错误；"提丢斯数列" 前 31 项和为 $\frac{2}{5}+\frac{3}{10}(2^0+\ldots+2^{29})+\frac{2}{5}\times 30=\frac{3\cdot 2^{30}}{10}+\frac{121}{10}$，故 C 正确；令 $\frac{3\cdot 2^{n-2}+4}{10}\leqslant 20$，则 $2^{n-2}\leqslant\frac{196}{3}$，故 $n=2,3,4,5,6,7,8$，而 $a_1<20$，故不超过 20 的有 8 项，故 D 错误；故选 C.

9.【答案】B

【命题意图】本题考查分段函数的图像与性质，考查考生数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】令 $f(x)=a$，则 $F(a)=m$，要使得 $y=F[f(x)]$ 的图像与直线 $y=m$ 有 3 个交点，则 $F(a)=m$ 存在两个实数根 a_1, a_2，且 $1\leqslant a_1<3, a_2=3$ 或 $1\leqslant a_1<3, -2\leqslant a_2<1$，结合函数 $F(x)$ 的图像可知，$1\leqslant m\leqslant 10$，观察可知，故选 B.

10.【答案】D

【命题意图】本题考查抛物线的方程与性质，考查考生数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】依题意，$M(0,4)$，不妨设点 A 在第一象限，$|MA|=m$. 易知△MAF 为等边三角形，故 $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}m, \frac{m}{2}+\frac{p}{2}\right)$，代入 $C: x^2=2py$ 中，故 $\frac{3}{4}m^2=2p\left(\frac{m}{2}+\frac{p}{2}\right)$，解得 $m=2p$；而 $|MO|=4$，则 $2p+\frac{p}{2}=4$，解得 $p=\frac{8}{5}$，故选 D.

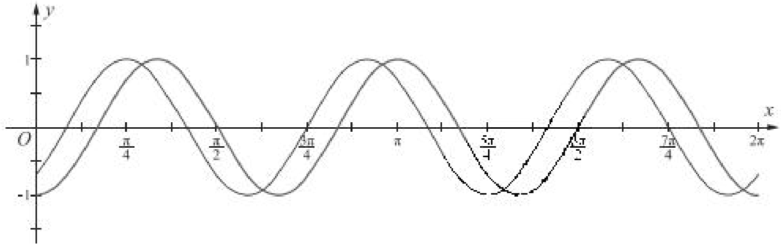
11.【答案】C

【命题意图】本题考查三角函数的图像与性质，考查考生数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】依题意，$x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$，故 $3x\in\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$，则 $3x-\varphi\in\left[-\varphi,\frac{3\pi}{4}-\varphi\right]$，故 $\begin{cases}-\varphi\geqslant-\frac{\pi}{2},\\ \frac{3\pi}{4}-\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\end{cases}$

解得 $\frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$，故①错误；当 φ 取得最大值时，$f(x)=\sin\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos 3x$，将函数 $f(x)$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{18}$ 个单位后，得到 $y=-\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$，再将横坐标伸长为原来的 2 倍，得到 $g(x)=-\cos\left(\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$，则 $g\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$，故②正确；在同一直角坐标系中分别作出 $y=\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$ 以及 $y=\sin\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)$ 的图像如下

所示，观察可知，它们在$[0,2\pi]$上有个 6 个零点，故③正确；故选 C.



12.【答案】B

【命题立意】本题考查双曲线的方程与性质，考查考生数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

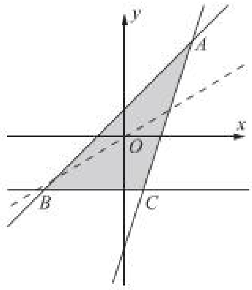
【解析】依题意，$\overrightarrow{F_2M}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AN}$得$F_2M//AN$，$\angle F_1NF_2=\angle ANF_2=\angle MF_2N$，故$|MN|=|MF_2|$；又$|MF_2|=\frac{1}{3}|AN|$，故$|MF_1|=\frac{1}{2}|MN|$；不妨设$|MN|=2m$，由双曲线的定义可得，$|MF_2|=m+2a$，$|NF_2|=3m-2a$，故$2m=m+2a$，故$m=2a$，则$|MN|=|MF_2|=|NF_2|=4a$，故$\triangle MNF_2$为等边三角形，故在$\triangle NF_1F_2$中，$\angle F_1NF_2=60^\circ$，即$|NF_1|=3m=6a$，$|NF_2|=4a$，$|F_1F_2|=2c$，由余弦定理，$4c^2=(6a)^2+(4a)^2-2\cdot 6a\cdot 4a\cdot\cos 60^\circ=28a^2$，则$e=\sqrt{7}$，故选 B.

二、填空题

13.【答案】12.

【命题意图】本题考查二元一次不等式组与平面区域、线性规划，考查考生数学运算、直观想象的核心素养.

【解析】作出不等式组所表示的平面区域如图阴影部分所示；观察可知，当直线$z=3x-5y$过点 C 时，z有最大值；联立$\begin{cases}3x-y-4=0,\\y+2=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=\frac{2}{3},\\y=-2,\end{cases}$故$C\left(\frac{2}{3},-2\right)$，故$z=3x-5y$的最大值为 12.



14.【答案】80.

【命题意图】本题考查二项式定理，考查考生数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意，$a_7=0$，$a_6=C_6^3\cdot 2^3\cdot(-1)^3=-160$，$a_8=C_6^4\cdot 2^2\cdot(-1)^2=240$，故$a_6+a_7+a_8=80$.

15.【答案】$\frac{\sqrt{7}}{5}$.

【命题意图】本题考查三角恒等变换，考查考生数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意，$(\sin\alpha\sin\beta)^2=\sin^2\alpha\sin^2\beta=(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)=(1+\cos\alpha\cos\beta)^2-(\cos\alpha+\cos\beta)^2=\frac{7}{25}$，则$\sin\alpha\sin\beta=\frac{\sqrt{7}}{5}$.

16.【答案】$a_n=\begin{cases}n,n=2k-1,\\-n,n=2k.\end{cases}$（或写成$a_n=(-1)^{n-1}\cdot n$）

【命题意图】本题考查数列的性质、数列的通项公式，考查考生数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意，$\{a_{2n-1}\}$单调递增，故$a_1<a_3<a_5<\cdots$；数列$\{a_{2n}\}$单调递减，故$a_2>a_4>a_6>\cdots$，所以$\cdots a_5>a_3>a_1>a_2>a_4>a_6>\cdots$；因为$\frac{|a_{n+1}-a_n|}{2n+1}=1$，故$a_{2n+1}-a_{2n}=4n+1$；同理$a_{2n}-a_{2n-1}=-4n+1$，所以$a_{2n+1}-a_{2n-1}=2$；又$a_1=1$，所以$a_{2n-1}=1+2(n-1)=2n-1$，所以$a_{2n}-(2n-1)=-(4n-1)$，则$a_{2n}=-2n$，所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\begin{cases}n,n=2k-1,\\-n,n=2k.\end{cases}$

三、解答题

17.【命题意图】本题考查正弦定理、余弦定理、二倍角公式，考查考生数学运算、直观想象的核心素养.

【解析】(1)依题意，$\angle ACB=30^\circ$，$\angle DAC=60^\circ$，

故$\triangle ADC$为等边三角形，则$AB=\sqrt{3}$，$AC=2\sqrt{3}$，$BD=\sqrt{BC^2+CD^2}=\sqrt{21}$，……………………（2分）

因为$\cos\angle BEA+\cos\angle BED=0$，

由余弦定理，$\dfrac{BE^2+AE^2-AB^2}{2BE\cdot AE}+\dfrac{BE^2+DE^2-BD^2}{2BE\cdot DE}=0$，……………………（4分）

解得$BE=3$；（6分）

(2)设$AB=x$，则$DC=\sqrt{3}x$，在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$AC=\dfrac{x}{\sin\theta}$，……………………（7分）

在$\triangle ACD$中，$\angle DAC=2\theta$，由正弦定理，$\dfrac{DC}{\sin\angle DAC}=\dfrac{AC}{\sin\angle ADC}$，……………………（9分）

即$\dfrac{\sqrt{3}x}{\sin 2\theta}=\dfrac{\frac{x}{\sin\theta}}{\sin 60^\circ}$，……………………（10分）

解得$\cos\theta=\dfrac{3}{4}$，……………………（11分）

则$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=\dfrac{1}{8}$.……………………（12分）

18.【命题意图】本题考查空间线面的位置关系、向量法求空间角，考查考生直观想象、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1)证明：因为$ABCD$为菱形，所以$BD\perp AC$.……………………（1分）

因为$A_1A\perp$底面$ABCD$，所以$A_1A\perp BD$.……………………（2分）

又$AC\cap A_1A=A$，所以$BD\perp$平面A_1AC.……………………（3分）

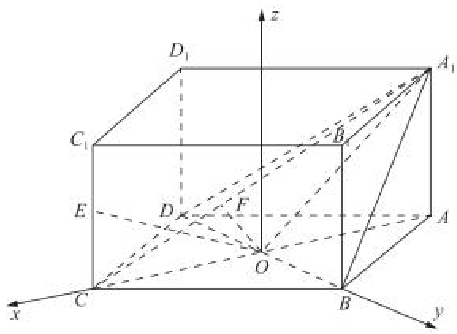
因为$OF\subset$平面A_1AC，故$BD\perp OF$；

又$\angle FOA_1=90^\circ$，即$OF\perp OA_1$，……………………（4分）

而$BD\cap OA_1=O$，故$OF\perp$平面A_1BD；

而$A_1B\subset$平面A_1BD，故$OF\perp A_1B$；……………………（5分）

(2)以O为坐标原点，OC、OB所在直线分别为x、y轴，过点O作垂直于平面$ABCD$的直线为z轴，建立空间直角坐标系$O-xyz$，设$AB=4$，$AA_1=3$，



则$A_1(-2\sqrt{3},0,3)$，$C(2\sqrt{3},0,0)$，$D(0,-2,0)$，$E(2\sqrt{3},0,\frac{3}{2})$，

则$\overrightarrow{A_1C}=(4\sqrt{3},0,-3)$，$\overrightarrow{DC}=(2\sqrt{3},2,0)$，$\overrightarrow{OE}=(2\sqrt{3},0,\frac{3}{2})$，……………………（7分）

设平面A_1CD的法向量为$\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1C}=4\sqrt{3}x-3z=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DC}=2\sqrt{3}x+2y=0.\end{cases}$……………………（8分）

令$x=\sqrt{3}$，得$\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},-3,4)$为平面$A_1CD$的一个法向量；……………………（10分）

记直线EO与平面A_1CD所成角为θ，故$\sin\theta=\dfrac{|\overrightarrow{OE}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\overrightarrow{OE}|\cdot|\boldsymbol{m}|}=\dfrac{4\sqrt{399}}{133}$.……………………（12分）

19.【命题意图】本题考查样本的数字特征、频率分布直方图、独立性检验、正态分布，考查考生数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1)依题意，$(0.0125+0.05+m+0.0375+0.0125)\times 4=1$，
解得 $m=0.1375$； …………………………………………………………………… (3 分)
故 $\bar{x}=(0.0125\times 4+0.05\times 8+0.1375\times 12+0.0375\times 16+0.0125\times 20)\times 4=11.8$； …………… (5 分)
(2)在本次试验中，K^2 的观测值 $k_0=\frac{1500\times(500\times 400-300\times 300)^2}{800\times 800\times 700\times 700}\approx 57.876>10.828$， ……… (7 分)
故有 99.9%的把握认为性别与选择租房时考虑的主要因素具有相关性. ………………………… (9 分)
(3)依题意，毕业后留在该市的应届毕业生人数为 $1000000\times 0.3=300000$ 人，
$P(860<x<2140)=P(\mu-\sigma<x<\mu+3\sigma)=\frac{0.6827+0.9973}{2}=0.84$，
故所求人数为 $300000\times 0.84=252000$. ………………………………………………………… (12 分)

20.【命题意图】本题考查椭圆的方程、直线与椭圆综合性问题，考查考生直观想象、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1)依题意，$bc=\sqrt{3}$①，$\frac{b^2}{a}=\frac{3}{2}$②；
由①可得，$b^2c^2=3$，即 $b^2(a^2-b^2)=3$③；
由②可得，$b^2=\frac{3}{2}a$④，
将④代入③中，整理可得，$2a^3-3a^2-4=0$，即 $2a^3-4a^2+a^2-4=0$，
即 $(a-2)(2a^2+a+2)=0$；
因为 $2a^2+a+2>0$，故 $a=2$，则 $b^2=3$，
故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$； ………………………………………………………… (4 分)
(2)由(1)得 $F_1(-1,0)$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，
若直线 AB 的斜率为零，易知，$\lambda=\frac{|F_1A|\cdot|F_1B|}{|AB|}=\frac{3}{4}$； ……………………………………… (5 分)
若直线 AB 的斜率不为零，可设 AB 的方程为 $x=my-1$，
联立得方程组 $\begin{cases}x=my-1\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$，消去 x 并整理得 $(3m^2+4)y^2-6my-9=0$，
$\Delta=36m^2+36(3m^2+4)=144(m^2+1)>0$，
$y_1+y_2=\frac{6m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=-\frac{9}{3m^2+4}$， …………………………………………………… (7 分)
$|AB|=\sqrt{1+m^2}\cdot|y_1-y_2|=\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$
$=\sqrt{1+m^2}\cdot\frac{\sqrt{144(m^2+1)}}{3m^2+4}=\frac{12(m^2+1)}{3m^2+4}$， …………………………………………… (9 分)
$\overrightarrow{F_1A}\cdot\overrightarrow{F_1B}=(x_1+1)(x_2+1)+y_1y_2=my_1\cdot my_2+y_1y_2=(m^2+1)y_1y_2=-\frac{9(m^2+1)}{3m^2+4}$， …… (11 分)
$\therefore\frac{\overrightarrow{F_1A}\cdot\overrightarrow{F_1B}}{|AB|}=-\frac{9}{12}=-\frac{3}{4}$，则 $\lambda=\frac{|F_1A|\cdot|F_1B|}{|AB|}=\frac{3}{4}$，
综上所述，$\lambda=\frac{3}{4}$. ………………………………………………………………………… (12 分)

21.【命题意图】本题考查利用导数研究函数的性质，考查考生数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1)依题意，$x\in(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{a}{x}-2x-1=\frac{-2x^2-x+a}{x}$， ………………………… (1 分)
则 $\Delta=1+8a$；

若 $\Delta=1+8a\leqslant 0$，即 $a\leqslant -\frac{1}{8}$ 时，$f'(x)\leqslant 0$； ……………………………………………… (2 分)

若 $\Delta=1+8a>0$，即 $a>-\frac{1}{8}$ 时，

令 $f'(x)=0$，即 $-2x^2-x+a=0$，故 $x=\frac{-1+\sqrt{1+8a}}{2}$（$x=\frac{-1-\sqrt{1+8a}}{2}$ 舍去）；

当 $\frac{-1+\sqrt{1+8a}}{2}<0$ 时，即 $-\frac{1}{8}<a\leqslant 0$ 时，$f'(x)\leqslant 0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，

当 $\frac{-1+\sqrt{1+8a}}{2}>0$ 时，即 $a>0$ 时，

当 $x\in\left(0,\frac{-1+\sqrt{1+8a}}{2}\right)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in\left(\frac{-1+\sqrt{1+8a}}{2},+\infty\right)$ 时，$f'(x)<0$，故函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{-1+\sqrt{1+8a}}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{-1+\sqrt{1+8a}}{2},+\infty\right)$ 上单调递减； …………………………… (5 分)

综上所述，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，当 $a>0$ 时，$\left(0,\frac{-1+\sqrt{1+8a}}{2}\right)$ 单调递增，在 $\left(\frac{-1+\sqrt{1+8a}}{2},+\infty\right)$ 上单调递减.

(2)依题意，$F(x)=-\ln x-x^2+1$

不妨设 $0<m<n$，则 $|mF(n)-nF(m)|>\lambda mn|m-n|$ 等价于 $\left|\frac{F(n)}{n}-\frac{F(m)}{m}\right|>\lambda|m-n|$，

考察函数 $g(x)=\frac{F(x)}{x}$，得 $g'(x)=\frac{\ln x-x^2-2}{x^2}$， ……………………………………………… (6 分)

令 $h(x)=\frac{\ln x-x^2-2}{x^2}$，$h'(x)=\frac{5-2\ln x}{x^3}$， ……………………………………………… (7 分)

则 $x\in(0,e^{\frac{5}{2}})$ 时，$h'(x)>0$，$x\in(e^{\frac{5}{2}},+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，所以 $h(x)$ 在区间 $(0,e^{\frac{5}{2}})$ 上是单调递增函数，在区间 $(e^{\frac{5}{2}},+\infty)$ 上是单调递减函数； ……………………………………………… (8 分)

故 $g'(x)\leqslant g'(e^{\frac{5}{2}})=\frac{1}{2e^5}-1<0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

从而 $g(m)>g(n)$，即 $\frac{F(n)}{n}<\frac{F(m)}{m}$， ……………………………………………… (9 分)

故 $\frac{F(m)}{m}-\frac{F(n)}{n}>\lambda(n-m)$，

所以 $\frac{F(m)}{m}+\lambda m>\frac{F(n)}{n}+\lambda n$，即 $g(m)+\lambda m>g(n)+\lambda n$ 恒成立，

设 $\varphi(x)=g(x)+\lambda x$，则 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒为单调递减函数， …………………………… (10 分)

从而 $\varphi'(x)=g'(x)+\lambda\leqslant 0$ 恒成立，故 $\varphi'(x)=g'(x)+\lambda\leqslant\frac{1}{2e^5}-1+\lambda\leqslant 0$，

故 $\lambda\leqslant 1-\frac{1}{2e^5}$，即实数 λ 的取值范围为 $\left(-\infty,1-\frac{1}{2e^5}\right)$. …………………………… (12 分)

22.【命题意图】本题考查极坐标方程、参数方程、直角坐标方程、普通方程的转化以及极坐标方程的应用，考查考生数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1)依题意，直线 l 的直角坐标方程为 $x=4$； ……………………………………………… (2 分)

因为曲线 C：$\begin{cases}x=2\cos 2\varphi,\\ y=2+2\sin 2\varphi,\end{cases}$ 故 $x^2+(y-2)^2=4$， ……………………………………………… (3 分)

故曲线 C 的普通方程为 $x^2+y^2-4y=0$， …………………………………………………………… (4 分)

则曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=4\sin\theta$； …………………………………………………………… (5 分)

(2)依题意，直线 l' 的极坐标方程为 $\theta=\alpha(\rho\in\mathbf{R})$

联立 $\begin{cases}\theta=\alpha,\\ \rho\cos\theta=4,\end{cases}$ 故 $|OM|=|\rho_M|=\dfrac{4}{|\cos\alpha|}$， …………………………………………………… (6 分)

由 $\begin{cases}\theta=\alpha,\\ \rho=4\sin\theta,\end{cases}$ 故 $|ON|=|\rho_N|=4|\sin\alpha|$， ………………………………………………………… (7 分)

故 $\lambda=\dfrac{|ON|}{|OM|}=4|\sin\alpha|\cdot\dfrac{|\cos\alpha|}{4}=\dfrac{1}{2}|\sin2\alpha|$， ………………………………………………… (9 分)

所以当 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ 或 $\dfrac{3\pi}{4}$ 时，λ 有最大值 $\dfrac{1}{2}$. ………………………………………………………………… (10 分)

23.【命题意图】本题考查绝对值不等式的解法、绝对值三角不等式的性质，考查考生数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1)依题意，$|x+1|-\left|x-\dfrac{3}{2}\right|\geqslant3x$；

当 $x<-1$ 时，$-x-1+x-\dfrac{3}{2}\geqslant3x$，解得 $x\leqslant-\dfrac{5}{6}$，故 $x<-1$； ……………………………………… (2 分)

当 $-1\leqslant x\leqslant\dfrac{3}{2}$ 时，$x+1+x-\dfrac{3}{2}\geqslant3x$，解得 $x\leqslant-\dfrac{1}{2}$，故 $-1\leqslant x\leqslant-\dfrac{1}{2}$； ……………………………… (3 分)

当 $x>\dfrac{3}{2}$ 时，$x+1-x+\dfrac{3}{2}\geqslant3x$，解得 $x\leqslant\dfrac{5}{6}$，故无解； …………………………………………… (4 分)

综上所述，不等式 $f(x)\geqslant3x$ 的解集为 $\left\{x\,\middle|\,x\leqslant-\dfrac{1}{2}\right\}$； ………………………………………… (5 分)

(2)因为，$\left||x+1|-\left|x-\dfrac{3}{2}\right|\right|\leqslant\left|x+1-x+\dfrac{3}{2}\right|=\dfrac{5}{2}$，

故 $-\dfrac{5}{2}\leqslant|x+1|-\left|x-\dfrac{3}{2}\right|\leqslant\dfrac{5}{2}$； ………………………………………………………………… (7 分)

而 $|2x-m|+|2x+1|\geqslant|2x-m-2x-1|=|m+1|$， …………………………………………………… (8 分)

故 $-|m+1|\geqslant-\dfrac{5}{2}$， ………………………………………………………………………………………… (9 分)

即 $|m+1|\leqslant\dfrac{5}{2}$，则 $-\dfrac{7}{2}\leqslant m\leqslant\dfrac{3}{2}$，故实数 m 的取值范围为 $\left[-\dfrac{7}{2},\dfrac{3}{2}\right]$. ……………………… (10 分)

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承 ‘’ 专业、专注、有态度 ‘’ 的创办理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网“年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。