

2022~2023 学年新乡市高三年级入学测试

数学参考答案（理科）

1. B 因为 $A=B$, 所以 $-2 \in A$. 当 $x=-2$ 时, $2y=1-y$, 得 $y=\frac{1}{3}$; 若 $2y=-2$, 则 $x=2$. 故实数 x 的

取值集合为 $\{-2, 2\}$.

2. A 因为 $\frac{a+z}{a \cdot \bar{z}} = \frac{a+1-2i}{a(1+2i)} = \frac{a-3-2(a+2)i}{5a}$ 为实数, 所以 $a=-2$.

3. C 由频率分布直方图知, $0.015 \times 5 + 0.02 \times 5 + 0.025 \times 5 + a \times 5 + 0.08 \times 5 = 1$, 所以 $a=0.06$, 所以销售价格 在 $[10, 20]$ 内的频率为 $(0.06+0.08) \times 5 = 0.7$, 故销售价格 在 $[10, 20]$ 内的车辆台数为 $0.7 \times 1000 = 700$.

4. C 易知直线 l 的斜率存在, 设直线的斜率为 k , $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$,

则 $\begin{cases} y_1^2 = 18x_1, \\ y_2^2 = 18x_2, \end{cases}$ 两式相减得 $y_1^2 - y_2^2 = 18(x_1 - x_2)$, 整理得 $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{18}{y_1 + y_2}$. 因为 MN 的中点为 $(5, 3)$, 所以

$k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{18}{6} = 3$, 即直线 l 的斜率为 3.

5. D 设内切球 O 的半径为 r , 球 O' 的半径为 R . 因为正三棱锥 $P-ABC$ 的体积为 3, 底面边长为 $2\sqrt{3}$, 所以

可求得侧棱长为 $\sqrt{7}$, 进而可得三棱锥 $P-ABC$ 的表面积为 $9\sqrt{3}$. 由 $V = \frac{1}{3} \times 9\sqrt{3} \times r$, 得 $r = \frac{\sqrt{3}}{3}$. 用一平行

于底面 ABC 的平面去截此三棱锥, 得到一个高为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 的棱台, 那么截下去的棱锥的高是原棱锥的 $\frac{1}{3}$, 根据相

似关系, 截下去的棱锥的体积为 $\frac{1}{9}$, 根据等体积法, $\frac{1}{3} \times \sqrt{3} \times R = \frac{1}{9}$, 解得 $R = \frac{\sqrt{3}}{9}$.

6. B 由题可归纳 $N(n, k) = \frac{k-2}{2}n^2 + \frac{4-k}{2}n$, 所以 $N(20, 23) = \frac{23-2}{2} \times 20^2 + \frac{4-23}{2} \times 20 = 4010$.

7. A 题中程序框图是用辗转相除法求 2022 和 1314 的最大公约数. 因为 $2022 = 1314 + 708$, $1314 = 708 + 606$, $708 = 606 - 102$, $606 = 102 \times 5 + 96$, $102 = 96 + 6$, $96 = 6 \times 16 + 0$, 所以 2022 和 1314 的最大公约数为 6.

8. D 因为展开式中只有第 5 项的二项式系数最大, 所以 $n=8$. 通项为

$T_{r+1} = C_8^r (2x)^{8-r} \left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r = C_8^r 2^{8-r} \cdot (-1)^r x^{\frac{8-3}{2}r}$, 令 $8 - \frac{3}{2}r = 2$, 得 $r=4$, 所以展开式中 x^2 项的系数为 C_8^4

$(-1)^4 = 1120$.

9. D 因为 $g(-x) + g(x) = 0$, 所以 $g(x)$ 为奇函数. 因为 $g(x)$ 图象相邻对称轴间的距离为 $\frac{\pi}{2}$, 所以 $g(x)$ 的

周期为 π . 因为 $g(x) = A \sin\left(\omega x - \frac{\omega\pi}{6} + \varphi\right)$, 所以 $\omega=2$, $-\frac{\omega\pi}{6} + \varphi = k\pi (k \in \mathbb{Z})$. 因为 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以

$\varphi = \frac{\pi}{3}$. 因为 $f(0) = \sqrt{3}$, 所以 $A = 2$, 所以 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$. 因为 $f(x)_{\max} = 2$, 所以 A 错误. 令

$2x + \frac{\pi}{3} = k\pi (k \in \mathbb{Z})$, 得 $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$, 所以 $f(x)$ 图象的对称中心为 $\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, 0\right) (k \in \mathbb{Z})$, 故 B

错误. 令 $2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$, 得 $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$. 所以 $f(x)$ 图象的对称轴为

$x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$, 故 C 错误. 令 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$, 得

$-\frac{5\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{12} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$, 所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{5\pi}{12} + k\pi, \frac{\pi}{12} + k\pi\right] (k \in \mathbb{Z})$, 故 D 正

确.

10. C 因为当 $x > 1$ 时, $2x + \frac{2}{x-1} = 2(x-1) + \frac{2}{x-1} + 2 \geq 2\sqrt{2(x-1) \times \frac{2}{x-1}} + 2 = 6$, 当且仅当 $x = 2$ 时, 等

号成立, 所以当 $x > 1$ 时, $f(x)_{\min} = 6$, 当 $x \leq 1$ 时, $f(x)$ 的最小值大于或等于 6. 当 $a \geq 1$ 时, $f(x)$ 在

$(-\infty, 1]$ 上单调递减, 则 $f(x)_{\min} = f(1) = 10 - 2a$. 由 $\begin{cases} 10 - 2a \geq 6, \\ 1 \leq a, \end{cases}$ 得 $1 \leq a \leq 2$. 当 $a < 1$ 时,

$f(x)_{\min} = f(a) = -a^2 + 9$. 由 $\begin{cases} -a^2 + 9 \geq 6, \\ a < 1, \end{cases}$ 得 $-\sqrt{3} \leq a < 1$. 综合可得 $a \in [-\sqrt{3}, 2]$.

11. B 因为 $f(x) + f(-x) = 0$, 所以 $f(x)$ 为奇函数. 令 $g(x) = [f(x)]^2 - x^2$, 则

$g'(x) = 2f(x)f'(x) - 2x > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 因为 $g(x)$ 为偶函数, 所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$

上单调递减. 不等式 $[f(x-1)]^2 < x^2 - 2x + 4$ 等价于 $[f(x-1)]^2 - (x-1)^2 < 3$, 因为 $f(1) = 2$, 所以

$g(1) = [f(1)]^2 - 1 = 3$, 所以不等式 $[f(x-1)]^2 - (x-1)^2 < 3$ 等价于 $g(x-1) < g(1)$, 所以 $-1 < x-1 < 1$, 即

$0 < x < 2$.

12. A 因为 $S_n + S_{n+1} = n(n+2)$, 所以当 $n = 1$ 时, $S_1 + S_2 = 2a_1 + a_2 = 3$. 因为 $a_1 = 1$, 所以 $a_2 = 1$. 当 $n \geq 2$

时,

$S_{n-1} + S_n = (n-1)(n+1)$, 两式相减得 $a_n + a_{n+1} = 2n+1$. 因为 $a_n + a_{n+1} = 2n+1 (n \geq 2)$, 所以

$a_{n+1} - (n+1) = -(a_n - n) (n \geq 2)$. 因为 $a_2 - 2 = -1$, 所以 $\{a_n - n\}$ 从第二项起是公比为 -1 的等比数列, 所

以 $a_n = n + (-1)^{n-1} (n \geq 2)$, 所以 $a_n = \begin{cases} 1, & n=1, \\ n + (-1)^{n-1}, & n \geq 2, \end{cases}$ 所以 $S_{2023} = 1 + 2 + 3 + \cdots + 2023 = 2023 \times 1012$,

$$S_{2024} = 1 + 2 + 3 + \cdots + 2024 - 1 = 2023 \times 1013, \text{ 所以 } \frac{S_{2024}}{S_{2023}} = \frac{1013}{1012}.$$

13. -6 因为 $\vec{a} \perp (\vec{a} - \vec{b})$, 所以 $\vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} = 20 - (8 - 2\lambda) = 0$, 得 $\lambda = -6$.

14. $\lg \frac{3}{2}$ 令 $10^x = t$, 则 $\frac{50}{t+1} - 5 = 10t$, 整理得 $2t^2 + 3t - 9 = (t+3)(2t-3) = 0$, 解得 $t = -3$ (舍去) 或 $t = \frac{3}{2}$, 所以 $10^x = \frac{3}{2}$, 故 $x = \lg \frac{3}{2}$.

15. $\frac{2}{3}$ 因为 $AB \parallel CD$, 所以 $\angle ABM$ 即异面直线 CD 与 BM 所成角. 连接 AM (图略), 因为 $AD = 1$, $AA_1 = 2$, $AB = 3$, 所以 $AM = \sqrt{6}$, $BM = 3$. 在 $\triangle ABM$ 中, $AM = \sqrt{6}$, $AB = BM = 3$, 所以 $\cos \angle ABM = \frac{3^2 + 3^2 - (\sqrt{6})^2}{2 \times 3 \times 3} = \frac{2}{3}$, 故异面直线 CD 与 BM 所成角的余弦值为 $\frac{2}{3}$.

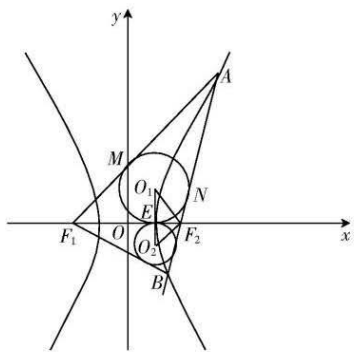
16. $\left[2\pi, \frac{10\pi}{3} \right)$ 设直线 l 的倾斜角为 θ , 则 $\theta \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right)$. 设 AF_1, AF_2, F_1F_2 与圆的切点分别为 M, N, E .

因为 $|F_1E| - |F_2E| = 2, |F_1E| + |F_2E| = 4$, 所以 $|F_1E| = 3, |F_2E| = 1$. 设 $\triangle AF_1F_2$ 和 $\triangle BF_1F_2$ 的内切圆圆心分别为

O_1, O_2 , 半径分别为 r_1, r_2 , 因为 $\triangle O_1EF_2 \sim \triangle F_2EO_2$, 所以 $\frac{|O_1E|}{|F_2E|} = \frac{|EF_2|}{|EO_2|}$, 所以 $\frac{r_1}{1} = \frac{1}{r_2}$, 即 $r_1 r_2 = 1$. 因为

$$\angle AF_2E \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right), \text{ 所以 } \angle O_1F_2E \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right), \text{ 所以 } \tan \angle O_1F_2E = \frac{r_1}{1} = r_1 \in \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3} \right), \text{ 又 } r_1 r_2 = 1, r_2 = \frac{1}{r_1},$$

$$\text{所以 } r_1^2 + r_2^2 = r_1^2 + \frac{1}{r_1^2} \in \left[2, \frac{10}{3} \right), \text{ 所以所求面积之和的取值范围是 } \left[2\pi, \frac{10\pi}{3} \right).$$



17. 解: (1) 因为 $b = 2a \sin \left(C + \frac{\pi}{6} \right)$, 所以 $\sin B = 2 \sin A \sin \left(C + \frac{\pi}{6} \right)$, 1分

所以 $\sin(A+C) = 2\sin A \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin C + \frac{1}{2}\cos C \right)$, 2分

所以 $\sin A \cos C + \cos A \sin C = \sqrt{3} \sin A \sin C + \sin A \cos C$, 3分

即 $\cos A \sin C = \sqrt{3} \sin A \sin C$. 4分

因为 $\sin C \neq 0$, 所以 $\cos A = \sqrt{3} \sin A$, 所以 $\tan A = \frac{\sqrt{3}}{3}$. 5分

因为 $A \in (0, \pi)$, 所以 $A = \frac{\pi}{6}$. 6分

(2) 在 $\triangle ACD$ 中, 由余弦定理得 $1 = 3 + \frac{c^2}{4} - \frac{3}{2}c$, 8分

所以 $c^2 - 6c + 8 = 0$ 解得 $c = 2$ 或 $c = 4$. 10分

当 $c = 2$ 时, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 当 $c = 4$ 时, $S_{\triangle ABC} = \sqrt{3}$. 12分

18. 解: (1) 因为 $P(\xi = 0) = \frac{23}{17}P(\eta = 0)$, 所以 $\frac{C_{50}^1}{C_{85}^1} = \frac{23}{17} \times \frac{C_x^1}{C_{115}^1}$, 2分

解得 $x = 50, y = 65, M = 100, N = 100$. 4分

因为 $K^2 = \frac{200 \times (50 \times 65 - 35 \times 50)^2}{100 \times 100 \times 115 \times 85} = \frac{1800}{391} \approx 4.604 > 3.841$, 5分

所以有 95% 的把握认为阅读习惯与年龄有关. 6分

(2) 由题意可知, 抽出的 10 人中, 经常电子阅读的有 5 人, 经常纸质阅读的有 5 人, 从中取 3 人, 则 X 的可能取值为 0, 1, 2, 3. 7分

因为 $P(X=0) = \frac{C_5^0 C_5^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{12}$; $P(X=1) = \frac{C_5^1 C_5^2}{C_{10}^3} = \frac{5}{12}$;

$P(X=2) = \frac{C_5^2 C_5^1}{C_{10}^3} = \frac{5}{12}$; $P(X=3) = \frac{C_5^3 C_5^0}{C_{10}^3} = \frac{1}{12}$. 9分

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

$E(X) = 0 \times \frac{1}{12} + 1 \times \frac{5}{12} + 2 \times \frac{5}{12} + 3 \times \frac{1}{12} = \frac{3}{2}$. 12分

19. (1) 证明: 因为 AC 是所作球面的直径, 所以 $AM \perp MC$. 2分

因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 $PA \perp CD$. 3 分

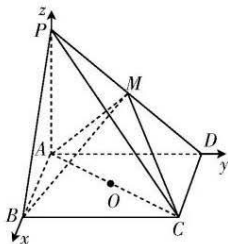
因为 $CD \perp AD$, 所以 $CD \perp$ 平面 PAD , 所以 $CD \perp AM$,

所以 $AM \perp$ 平面 PCD , 所以 $AM \perp PD$. 4 分

因为 $PA = AD$, 所以 M 为 PD 的中点. 5 分

(2) 解 以 A 为坐标原点, AB, AD, AP 所在直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系,

设 $AB = t$, 则 $M(0, 4, 4), C(t, 8, 0), B(t, 0, 0)$. 6 分



设平面 ABM 的法向量为 $\vec{n} = (x_1, y_1, z_1)$, 因为 $\vec{AB} = (t, 0, 0)$, $\vec{AM} = (0, 4, 4)$,

$$\text{所以 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AB} = tx_1 = 0, \\ \vec{n} \cdot \vec{AM} = 4y_1 + 4z_1 = 0, \end{cases} \quad \text{令 } y_1 = 1, \text{ 则 } \vec{n} = (0, 1, -1). \quad 8 \text{ 分}$$

设平面 ACM 的法向量为 $\vec{m} = (x_2, y_2, z_2)$, 因为 $\vec{AC} = (t, 8, 0)$, $\vec{AM} = (0, 4, 4)$,

$$\text{所以 } \begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{AC} = tx_2 + 8y_2 = 0, \\ \vec{m} \cdot \vec{AM} = 4y_2 + 4z_2 = 0, \end{cases} \quad \text{令 } y_2 = 1, \text{ 得 } \vec{m} = \left(-\frac{8}{t}, 1, -1\right). \quad 10 \text{ 分}$$

设二面角 $B-AM-C$ 为 α ,

$$\text{则 } \cos \alpha = |\cos \langle \vec{n}, \vec{m} \rangle| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{m}|}{|\vec{n}| |\vec{m}|} = \frac{2}{\sqrt{2} \times \sqrt{\frac{64}{t^2} + 2}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

解得 $t = 4$, 即 $AB = 4$. 12 分

20. 解: (1) 因为椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 所以椭圆 C 的左顶点 $P(-2, 0)$. 1 分

设直线 AB 的方程为 $x = my - 1$, $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$$\text{联立方程组 } \begin{cases} x = my - 1, \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \end{cases} \quad \text{得 } (m^2 + 4)y^2 - 2my - 3 = 0,$$

$$\text{则 } y_1 + y_2 = \frac{2m}{m^2 + 4}, y_1 y_2 = \frac{-3}{m^2 + 4}, \quad 3 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } |AB| = \sqrt{(1+m^2)[(y_1+y_2)^2 - 4y_1y_2]} = 4\sqrt{\frac{(1+m^2)(m^2+3)}{(m^2+4)^2}}. \quad 4 \text{ 分}$$

$$\text{因为点 } P \text{ 到直线 } AB \text{ 的距离 } d = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}, \quad 5 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2}|AB|d = 2\sqrt{\frac{m^2+3}{(m^2+4)^2}} = 2\sqrt{\frac{m^2+3}{(m^2+3)^2 + 2(m^2+3) + 1}} = 2\sqrt{\frac{1}{m^2+3 + \frac{1}{m^2+3} + 2}}.$$

$$\text{因为 } m^2+3 \geq 3, \text{ 所以当 } m^2+3=3, \text{ 即 } m=0 \text{ 时, } \triangle PAB \text{ 面积取得最大值, 最大值为 } \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad 6 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 由 (1) 可知 } k_{PA} = \frac{y_1}{x_1+2} = \frac{y_1}{my_1+1}, \quad k_{PB} = \frac{y_2}{x_2+2} = \frac{y_2}{my_2+1}, \quad k_{AB} = \frac{1}{m}, \quad 8 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } k_{AB}(k_{PA} + k_{PB}) &= \frac{1}{m} \left(\frac{y_1}{my_1+1} + \frac{y_2}{my_2+1} \right) = \frac{1}{m} \times \frac{2my_1y_2 + y_1 + y_2}{m^2y_1y_2 + m(y_1+y_2) + 1} \\ &= \frac{1}{m} \times \frac{\frac{-6m}{m^2+4} + \frac{2m}{m^2+4}}{\frac{-3m^2}{m^2+4} + \frac{2m^2}{m^2+4} + 1} = \frac{1}{m} \times \frac{-4m}{4} = -1, \end{aligned}$$

$$\text{所以 } k_{AB}(k_{PA} + k_{PB}) \text{ 为定值, 且 } k_{AB}(k_{PA} + k_{PB}) = -1. \quad 12 \text{ 分}$$

$$21. (1) \text{ 解: 因为 } f(x) = \frac{e^x}{x^2} - ax + 2a \ln x, \text{ 所以 } f'(x) = \frac{x-2}{x} \left(\frac{e^x}{x^2} - a \right). \quad 1 \text{ 分}$$

$$\text{令 } g(x) = \frac{e^x}{x^2} (x > 0), \text{ 则 } g'(x) = \frac{(x-2)e^x}{x^3},$$

$$\text{所以 } g(x) \text{ 在 } (0, 2) \text{ 上单调递减, 在 } (2, +\infty) \text{ 上单调递增, 所以 } g(x)_{\min} = g(2) = \frac{e^2}{4}. \quad 2 \text{ 分}$$

$$\text{当 } a \leq \frac{e^2}{4} \text{ 时, } \frac{e^x}{x^2} - a \geq 0, \text{ 若 } x \in (0, 2), \text{ 则 } f'(x) < 0, \text{ 若 } x \in (2, +\infty), \text{ 则 } f'(x) > 0,$$

$$\text{所以 } f(x) \text{ 只有一个极值点.} \quad 4 \text{ 分}$$

$$\text{当 } a > \frac{e^2}{4} \text{ 时, 存在 } x_1 \in (0, 2), x_2 \in (2, +\infty), \text{ 使 } \frac{e^x}{x^2} - a = 0.$$

$$\text{当 } x \in (0, x_1) \cup (x_2, +\infty) \text{ 时, } \frac{e^x}{x^2} - a > 0; \text{ 当 } x \in (x_1, x_2) \text{ 时, } \frac{e^x}{x^2} - a < 0.$$

所以 $x \in (0, x_1)$, $f'(x) < 0$; $x \in (x_1, 2)$, $f'(x) > 0$; $x \in (2, x_2)$, $f'(x) < 0$; $x \in (x_2, +\infty)$, $f'(x) > 0$.

所以 $f(x)$ 有三个极值点. 5 分

综上, 当 $a \leq \frac{e^2}{4}$ 时, $f(x)$ 只有一个极值点; 当 $a > \frac{e^2}{4}$ 时, $f(x)$ 有三个极值点. 6 分

(2) 证明: $f(x) = \frac{e^x}{x^2} - ax + 2a \ln x = e^{x-2\ln x} - a(x-2\ln x)$. 8 分

令 $h(x) = x - 2\ln x$, 则 $h'(x) = \frac{x-2}{x}$, 所以当 $x \in (0, 2)$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减,

当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增, 所以 $h(x) \geq h(2) = 2 - 2\ln 2$. 9 分

令 $t = x - 2\ln x$, 则 $f(x) \geq 0$ 等价于 $e^t - at \geq 0$.

因为 $t = h(x) > 0$, 所以 $e^t - at \geq 0$ 等价于 $a \leq \frac{e^t}{t}$. 10 分

令 $\varphi(t) = \frac{e^t}{t}$, $t \geq 2 - 2\ln 2$, 则 $\varphi'(t) = \frac{(t-1)e^t}{t^2}$,

当 $t \in [2 - 2\ln 2, 1)$ 时, $\varphi'(t) < 0$, $\varphi(t)$ 单调递减,

当 $t \in (1, +\infty)$ 时, $\varphi'(t) > 0$, $\varphi(t)$ 单调递增, 所以 $\varphi(t)_{\min} = \varphi(1) = e$. 11 分

因为 $a \leq e$, 所以 $a \leq \varphi(t)$, 故 $f(x) \geq 0$. 12 分

22. 解: (1) 曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \rho \cos \theta - \frac{\sqrt{2}}{2} \rho \sin \theta = \sqrt{2}$,

因为 $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, 所以 $x - y - 2 = 0$, 2 分

即曲线 C_1 的直角坐标方程为 $x - y - 2 = 0$.

因为曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2 - 2\rho \cos \theta - 3 = 0$,

且 $x = \rho \cos \theta$, $x^2 + y^2 = \rho^2$,

所以曲线 C_2 的直角坐标方程为 $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$,

即 $(x-1)^2 + y^2 = 4$. 5 分

(2) 因为 $P(3,1)$ 在曲线 C_1 上, 所以曲线 C_1 的参数方程为
$$\begin{cases} x=3+\frac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y=1+\frac{\sqrt{2}}{2}t. \end{cases}$$
 6 分

将曲线 C_1 的参数方程代入 $(x-1)^2 + y^2 = 4$ 中, 得 $t^2 + 3\sqrt{2}t + 1 = 0$,

设 A, B 对应的参数分别为 t_1, t_2 , 则 $t_1 + t_2 = -3\sqrt{2}$, $t_1 t_2 = 1$,

所以 $|PA| + |PB| = |t_1 + t_2| = 3\sqrt{2}$. 8 分

因为 $|AB| = |t_1 - t_2| = \sqrt{(t_1 + t_2)^2 - 4t_1 t_2} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 - 4} = \sqrt{14}$,

所以 $\frac{|PA| + |PB|}{|AB|} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$. 10 分

23. 解: (1) 由题知, 当 $a=1$ 时, $f(x) = |x+1| + |x-2|$,

所以 $f(x) = \begin{cases} -2x+1, & x < -1, \\ 3, & -1 \leq x < 2, \\ 2x-1, & x \geq 2. \end{cases}$ 2 分

因为 $f(x) \leq 5$, 所以 $\begin{cases} x < -1, \\ -2x+1 \leq 5 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} -1 \leq x < 2, \\ 3 \leq 5 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x \geq 2, \\ 2x-1 \leq 5, \end{cases}$ 4 分

解得 $-2 \leq x < -1$ 或 $-1 \leq x < 2$ 或 $2 \leq x \leq 3$,

所以不等式 $f(x) \leq 5$ 的解集为 $[-2, 3]$. 5 分

(2) 因为 $f(x) = |x+a| + |x-2a| \geq |x+a-x+2a| = |3a|$, 所以 $f(x)_{\min} = |3a|$, 7 分

所以 $|3a| \geq 2a^2 - 2$, 所以 $2|a|^2 - 3|a| - 2 \leq 0$, 即 $(2|a|+1)(|a|-2) \leq 0$,

所以 $|a| \leq 2$, 解得 $-2 \leq a \leq 2$,

所以 a 的取值范围为 $[-2, 2]$. 10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线