江西省重点中学协作体2023届高三第二次联考

数学试卷(理科)

命题：上饶中学 潘东忠 鹰潭一中 黄鹤飞 彭越琴

第Ⅰ卷（选择题共 60 分）

一、选择题：本大题共 12 个小题,每小题 5 分，共 60 分

1．设集合 $A=\{x|y=\sqrt{3-x}\}, B=\left\{x\in Z\left|\frac{x}{x-4}\le 0\right.\right\}$，则 $A\cap B=$（ C ）

A．$\{x|0\le x<4\}$　　B．$\{x|0\le x\le 4\}$　　C．$\{x\in N|x<4\}$　　D．$\{x|0\le x\le 3\}$

2．复数 z 满足 $zi=2-i$，则下列结论正确的是（ D ）　$z=-1-2i$

A．$z^2+2z-5=0$　　B．$\bar{z}=1+2i$　　C．z 在复平面内对应的点位于第四象限　　D．$|z|=\sqrt{5}$

3．设 a、b、c 为三角形ABC的三边长分别对应角 A、B、C，$a\ne 1, b>c$，若 $\log_{b+c}a+\log_{b-c}a=2\log_{b+c}a\cdot\log_{b-c}a$，则角 B=（ B ）γ

A．$\frac{\pi}{2}$　　B．$\frac{\pi}{3}$　　C．$\frac{\pi}{4}$　　D．$\frac{\pi}{6}$

4．草莓中有多种氨基酸、微量元素、维生素，能够调节免疫功能，增强机体免疫力。草莓味甘、性凉，有润肺生津，健脾养胃等功效，受到众人的喜爱。根据草莓单果的重量，可将其从小到大依次分为4个等级，其等级 x（$x=1,2,3,4$）与其对应等级的市场销售单价 y(单位：元/千克)近似满足函数关系式 $y=e^{ax+b}$。若花同样的钱买到的1级草莓比4级草莓多1倍，且1级草莓的市场销售单价为24元/千克，则3级草莓的市场销售单价最接近（ C ）(参考数据：$\sqrt[3]{2}\approx 1.26$，$\sqrt[3]{4}\approx 1.59$)

A．30.24元/千克　　B．33.84元/千克　　C．38.16元/千克　　D．42.64元/千克

5．已知 $\sin(x-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{5}}{5}$，则 $\cos(2x-\frac{\pi}{3})=$（ A ）D

A．$\frac{2\sqrt{3}-3}{10}$　　B．$\frac{2\sqrt{3}\pm 3}{10}$　　C．$\frac{3\sqrt{3}+4}{10}$　　D．$\frac{3\sqrt{3}\pm 4}{10}$

6．某地市在 2023 年全市一模测试中，全市高三学生数学成绩 X 服从正态分布 $N(90,\sigma^2)$，已知 $P(88<X<92)=0.32$，$P(X<85)=m$，则下列结论正确的是（ A ）

A．$0<m<0.34$　　B．$m=0.34$　　C．$0.34<m<0.68$　　D．$m=0.68$

7．若 $\frac{(x-2)^9+1}{x-1}=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+\cdots\cdots+a_8(x-1)^8$，则 $a_5+a_6=$（ A ）D

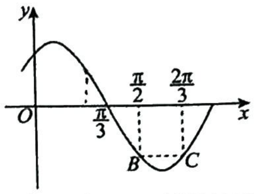
A．-48　　B．48　　C．28　　D．-28

8. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中，棱长为 2 的侧棱 PD 垂直底面边长为 2 的正方形 $ABCD$，M 为棱 PD 的中点，过直线 BM 的平面 α 分别与侧棱 PA、PC 相交于点 E、F，当 $PE=PF$ 时，截面 $MEBF$ 的面积为（ C ） D

A. $2\sqrt{2}$　　B. 2　　C. $3\sqrt{3}$　　D. 3

$\sin(2x+\frac{\pi}{3})\geq m+\sin 2x$

9. 函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\pi)$ 的部分图象如图，$BC\,//\,x$ 轴，当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 时，不等式 $f(x)\geq m+\sin 2x$ 恒成立，则 m 的取值范围是（ BD ） B



A. $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$　　B. $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$

C. $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right]$　　D. $\left(-\infty,-1\right]$

10. 圆周上有 8 个等分点，任意选这 8 个点中的 4 个点构成一个四边形，则四边形为梯形的概率是（ ~~B~~ ） C

A. $\cancel{\frac{10}{35}}$　　B. $\frac{12}{35}$　　C. $\cancel{\frac{14}{35}}$　　D. $\frac{16}{35}$

11. 已知 F 双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点，A_1,A_2 分别是双曲线 C 的左右顶点，过 F 作双曲线渐近线的垂线与该渐近线在第一象限的交点为 M，直线 A_1M 交 C 的右支于点 P，若 $|MP|=|MA_2|$，且 $k_{A_2P}+k_{A_2M}=0$，则 C 的离心率为（ C ） D

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. $\sqrt{5}$

12. 已知函数 $g(x)$，$h(x)$ 分别是定义在 R 上的偶函数和奇函数，且 $g(x)+h(x)=2023^x+\log_{2023}(x+\sqrt{1+x^2})$，若函数 $f(x)=2023^{-|x-2023|}-\lambda g(x-2023)-2\lambda^2$ 有唯一零点，则实数 λ 的值为（ ~~A~~ ~~AD~~ C D

2

A. -1 或 $\frac{1}{2}$　　B. ~~-1 或~~ $-\frac{1}{2}$　　C. -1　　D. $\frac{1}{2}$

第 II 卷（非选择题共 90 分）

二、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

$a_3a_8=10$

13. 在正项等比数列 $\{a_n\}$ 中，a_3 与 a_8 是方程 $x^2-30x+10=0$ 的两个根，则 $\lg a_1+\lg a_2+\cdots+\lg a_{10}=$ 5 .

$a_3a_8\ a_4a_7$
$\log a_1a_{10}\ a_2a_9\ \cdots a_5a_6$

14. 已知实数 x,y 满足 $\begin{cases}x-y+1\geq 0\\x+y-2\geq 0\\x\leq 1\end{cases}$，则 $z=\frac{|x|}{\sqrt{x^2+2xy+y^2}}$ 的取值范围是 $[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$

$(\frac{1}{2},\frac{3}{2})(1,2)(1,1)$

15. 已知函数 $f(x)=axe^{-x}-x+\ln x$，若 $f(x)\leq 1$，则 a 的取值范围为 [0,1,e]

16. 已知抛物线 $y^2=4x$，圆 $E:(x-4)^2+y^2=12$，设 O 为坐标原点，过圆心 E 的直线与圆 E 交于点 A,B，
直线 OA,OB 分别交抛物线 C 于点 P,Q（点 P,Q 不与点 O 重合）. 记 ΔOAB 的面积为 S_1，$\triangle OPQ$ 的面积为 S_2，则 $\dfrac{S_1}{S_2}$ 的最大值________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.（本小题满分 12 分）

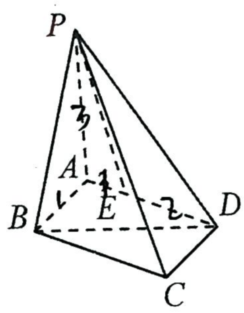
已知数列 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列，且 $a_1=1$，若 16 和 26 分别是 $\{a_n\}$ 中的项.

（1）当 d 取最大值时，求通项 a_n；

（2）在（1）的条件下，求数列 $\left\{\dfrac{1}{(5n+1)a_n}\right\}$ 的前 n 项和 S_n。

18.（本小题满分 12 分）

如图，在底面 $ABCD$ 为矩形的四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $PAD\perp$ 平面 PCD.



(1) 证明：$AB\perp$ 平面 PAD

(2) 若 $PB=\sqrt{10}, PD=3\sqrt{2}, AD=3, AB=1$，$E$ 在棱 AD 上，且 $AD=3AE$，求 PE 与平面 PBD 所成角的正弦值.

19.（本小题满分 12 分）

2023 年高考进入倒计时，为了帮助学子们在紧张的备考中放松身心，某重点高中通过开展形式多样的减压游戏，确保同学们以稳定心态，良好地状态迎战高考，游戏规则如下：盒子中初始装有 2 个白球和 1 个红球~~各一个~~，每次有放回的任取一个，连续取两次，将以上过程记为一轮。如果每一轮取到的两个球都是红球，则记该轮为成功，否则记为失败。在抽取过程中，如果某一轮成功，则停止；否则，在盒子中再放入一个白球，然后接着进行下一轮抽球，如此不断继续下去，直至成功。

(1) 如果某同学进行该抽球游戏时，最多进行三轮，即使第三轮不成功，也停止抽球，记其进行抽球试验的轮次数为随机变量 X，求 X 的分布列和数学期望；

(2) 为验证抽球试验成功的概率不超过 $\dfrac{1}{3}$，假设有 1000 名学生独立的进行该抽球试验，记 t 表示成功时抽球试验的轮次数，y 表示对应的人数，部分统计数据如下：

t	1	2	3	4	5
y	120	62	33	20	15

求 y 关于 t 的回归方程 $\hat{y}=\dfrac{\hat{b}}{t}+\hat{a}$，并通过回归方程预测成功的总人数（$\hat{y}$ 取整数部分）；

(3) 证明：$\dfrac{1}{3^2}+\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\dfrac{1}{4^2}+\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{4^2}\right)\dfrac{1}{5^2}+\cdots+\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right)\dfrac{1}{(n+2)^2}<\dfrac{1}{3}$.

附：经验回归方程系数：$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\cdot\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}$，$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$；

参考数据：$\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2=1.46$，$\overline{x}=0.46$，$\overline{x}^2=0.212$（其中$x_i=\dfrac{1}{t_i}$，$\overline{x}=\dfrac{1}{5}\sum\limits_{i=1}^{5}x_i$）.

20.（本小题满分 12 分）

已知过曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$上一点$(x_0,y_0)$作椭圆$C$的切线$l$，则切线$l$的方程为$\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$。若$P$为椭圆$C_1:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$上的动点，过$P$作$C_1$的切线$l_0$交圆$C_2:x^2+y^2=4$于$M,N$，过$M,N$分别作$C_2$的切线$l_1,l_2$，直线$l_1,l_2$交于点$Q$。

（1）求动点Q的轨迹E的方程；

（2）已知R为定直线$x=4$上一动点，过R的动直线m与轨迹E交于两个不同点A、B，在线段AB上取一点T，满足$|AR||TB|=|AT||RB|$，试证明动点T的轨迹过定点。

21.（本小题满分 12 分）

已知函数$f(x)=\dfrac{\sin x-\cos x}{2e^x}-\dfrac{x}{k},g(x)=e^x-k\sin x-1$.

(1)若$f(x)$在区间$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$内存在极值点$\theta$，求实数$k$的取值范围；

(2)在（1）的条件下，求证：$g(x)$在区间$(0,\pi)$内存在唯一的零点φ，并比较φ与2θ的大小，说明理由.

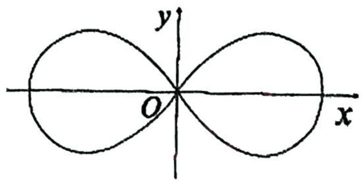
（二）选考题：共 10 分

22.（本小题满分 10 分）【选修 4-4：坐标系与参数方程】

瑞士数学家雅各布·伯努利在 1694 年类比椭圆的定义，发现了双纽线。双纽线的图形如图所示，它的形状像个横着的“8”，也像是无穷符号“∞”。定义在平面直角坐标系xOy中，把到定点$F_1(-a,0),F_2(a,0)$距离之积等于$a^2(a>0)$的点的轨迹称为双纽线C. 以O为极点，x轴的正半轴为极轴建立极坐标系.

（1）求双纽线C的极坐标方程；

（2）双纽线C与极轴交于点 P，点 M 为 C 上一点，求ΔOPM面积的最大值(用a表示).



23.（本小题满分 10 分）【选修 4-5：不等式选讲】

已知$a>0,b>0,c>0,ab+bc+ca=3$.

(1)求$a^3+b^3+c^3$的最小值 M;

(2)关于x的不等式$|x-m|-|x+1|>M$有解，求实数m的取值范围.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。