



乌江新高考协作体

2022-2023 学年（下）期末学业质量联合调研抽测

高二数学答案

(分数：150 分，时间：120 分钟)

1. A 2. A 3. B 4. B

5. B【解析】根据函数 $f(x) = \ln(x^2 - 2x - 8)$ 单调递增区间，由复合函数单调性的性质先求得单调递增的区间；由两个区间的包含关系即可判断充分必要性.

6. A【详解】当 $x=5>1$ 时， $\vec{a}=(2,2), \vec{b}=(1,1), \vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 0 ，不是锐角，所以充分性不成立，若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为锐角，则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = x - 3 + 2 > 0, x > 1$ 必要性成立， $\therefore "x > 1"$ 是 " $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角为锐角" 的必要不充分条件.

7. D【详解】对于①，设 $f(x)=1$ ，满足 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的最大值，但 x_0 不是 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的一个 M 点，①错误；对于②，设 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ ，对于区间 $[a, b]$ ，令 b 为有理数，满足对任意 $x \in [a, b]$

($x \neq b$) 都成立 $f(x) < f(b)$ ，故 b 为区间 $[a, b]$ 上的一个 M 点，但 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上不是严格增函数.

8. C【分析】通过换元， $f(x)=t$ ，则可以转化为 $y=f(t)$ 与 $y=2t+\frac{19}{9}$ 的交点的个数，画出图像既可以解决.

9. ABD【分析】根据扇形统计图由产品升级前的营收为 a ，升级后的营收为 $2a$ ，结合图中数据即可结合选项逐一求解.

10. ACD【分析】先求出 $f(x)$ 的解析式，然后逐项分析验证即可.

11. BCD【分析】解方程得到 A 错误，解方程得到 $\begin{cases} a^2 + a > 0 \\ -a^2 + a > 0 \end{cases}$ ，解得 B 正确，计算零点个数为 2 得到 C

正确，根据斜率的关系得到 $x_1 + x_2 = 0$ ，D 正确，得到答案.

12. BCD【分析】直接由递推公式求出 a_4 即可判断 A 选项；分 n 为奇数或偶数即可判断 B 选项；分 n 为奇

数或偶数结合累加法即可判断 C 选项；由分组求和法即可判断 D 选项.

13. 7.5

14. $\frac{2}{3}$

15. $5\sqrt{3}$

16. $\sqrt{5} + \sqrt{3}$

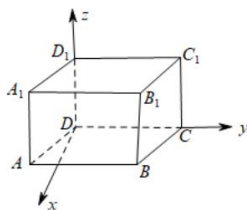
17. 【详解】原式 $= [0.5^2]^{-0.5} + \left[\left(\frac{1}{3} \right)^3 \right]^{\frac{1}{3}} - 3$

$$= (0.5)^{-1} + \left(\frac{1}{3} \right)^{-1} - 3$$

$$= 2 + 3 - 3$$

$$= 2.$$

18. 【详解】如图建立空间直角坐标系，



则 $D(0,0,0), B(\sqrt{3},1,0), C(0,2,0), A(\sqrt{3},-1,0), A_1(\sqrt{3},-1,2), C_1(0,2,2), D_1(0,0,2), F(\sqrt{3},-1,1)$.

(1) 设平面 A_1C_1D 的法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$,

$$\vec{DC_1} = (0, 2, 2), \vec{DA_1} = (\sqrt{3}, -1, 2),$$

$$\text{则} \begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{DA_1} = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{DC_1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y + 2z = 0 \\ \sqrt{3}x - y + 2z = 0 \end{cases}, \text{取 } y = 1, z = -1, x = \sqrt{3},$$

$$\therefore \vec{m} \text{ 可为 } (\sqrt{3}, 1, -1)$$

$$BE = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{BD}|}{|\vec{m}|} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}.$$

(2) 由 (1) 知平面 A_1C_1D 的法向量为 $\vec{m} = (\sqrt{3}, 1, -1)$, 且 $\vec{m} \parallel \vec{BE}$,

设平面 FC_1B 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\therefore \vec{FC_1} = (-\sqrt{3}, 3, 1), \vec{FB} = (0, 2, -1),$$

$$\therefore \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{FC_1} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{FB} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y - z = 0 \\ -\sqrt{3}x + 3y + z = 0 \end{cases}, \text{取 } y=1, z=2, x=\frac{5\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \vec{n} = (\frac{5\sqrt{3}}{3}, 1, 2),$$

$$\therefore \sin \theta = |\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle| = \frac{4}{\sqrt{\frac{200}{3}}} = \frac{\sqrt{6}}{5}.$$

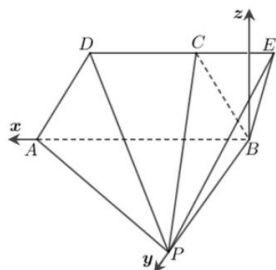
19. 【详解】(1) 因 $PC = 3\sqrt{2}$, $BC = \sqrt{2}$, $PB = 4$, 则有 $PB^2 + BC^2 = PC^2$, 即有 $PB \perp BC$,

又 $PB \perp AB$, 且 $AB \cap BC = B$, $AB, BC \subset$ 平面 $ABCD$,

于是得 $PB \perp$ 平面 $ABCD$, 而 $PB \subset$ 平面 PBC ,

所以平面 $PBC \perp$ 平面 $ABCD$.

(2) 在平面 $ABCD$ 内, 过 B 作直线垂直于 AB , 交直线 CD 于 E , 有 $CE = 1$, $BE = 1$, 如图,



则 $\angle EBP$ 为二面角 $C-AB-P$ 的平面角, $AB \perp$ 平面 EBP , $AB \perp PE$, 于是得 $CE \perp PE$,

Rt $\triangle PEC$ 中, $PC = \sqrt{22}$, $CE = 1$, 则 $PE = \sqrt{21}$, 在 $\triangle PBE$ 中, $PE = \sqrt{21}$, $BE = 1$, $PB = 4$,

由余弦定理得 $\cos \angle PBE = \frac{PB^2 + BE^2 - PE^2}{2PB \cdot BE} = -\frac{1}{2}$, 则有 $\angle PBE = \frac{2}{3}\pi$,

显然平面 $ABP \perp$ 平面 EBP , 在平面 EBP 内过 B 作 $Bz \perp BP$, 则 $Bz \perp$ 平面 ABP ,

以 B 为原点, 分别以射线 BA, BP, Bz 为 x, y, z 轴非负半轴建立空间直角坐标系,

则 $B(0, 0, 0), A(4, 0, 0), C(1, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), D(3, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), P(0, 4, 0)$, $\vec{BA} = (4, 0, 0)$, $\vec{BC} = (1, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$,

设平面 $ABCD$ 的法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{BC} = x - \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{BA} = 4x = 0 \end{cases}$, 令 $z = 1$, 得 $\vec{n} = (0, \sqrt{3}, 1)$

而 $\vec{PD} = (3, -\frac{9}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, 设 PD 与平面 $ABCD$ 所成的角为 θ ,

$$\sin \theta = |\cos \langle \vec{n}, \vec{PD} \rangle| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{PD}|}{|\vec{n}| |\vec{PD}|} = \frac{4\sqrt{3}}{2 \times \sqrt{30}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

所以 PD 与平面 $ABCD$ 所成的角的正弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

20. 【详解】 (1) 解: 依题意, $c \cdot \cos A + \sqrt{3}c \sin A - a - b = 0$,

故 $\sin C \cos A + \sqrt{3} \sin C \sin A - \sin A - \sin B = 0$,

则 $\sin C \cos A + \sqrt{3} \sin C \sin A - \sin A - \sin(A+C) = 0$,

$\sin C \cos A + \sqrt{3} \sin C \sin A - \sin A - \sin A \cos C - \cos A \sin C = 0$,

所以 $\sqrt{3} \sin C \sin A - \sin A - \sin A \cos C = 0$,

由于 $0 < A < \pi$, 所以 $\sin A > 0$,

所以 $\sqrt{3} \sin C - 1 - \cos C = 0$, 故 $2 \sin\left(C - \frac{\pi}{6}\right) = 1$,

由于 $0 < C < \pi$, $-\frac{\pi}{6} < C - \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6}$,

所以, $C - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$, 即 $C = \frac{\pi}{3}$.

(2) 解: 由题意, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{\sqrt{3}}{4} ab = 4\sqrt{3}$, 所以 $ab = 16$.

又由余弦定理 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$, $c = 4$, 即 $a^2 + b^2 - ab = 16$,

所以 $a^2 + b^2 = 32$, 所以 $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = 0$

所以 $a = b = 4$.

21. 【详解】

(1) $f'(x) = a \ln x + a$, 则 $f(1) = 0$, $f'(1) = a$,

故 $y = f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程 $y = a(x-1)$,

把点 $(3, 2)$ 代入切线方程可得, $a = 1$, $f'(x) = \ln x + 1$, $x > 0$,

易得, 当 $0 < x < \frac{1}{e}$ 时, $f'(x) < 0$, 函数单调递减,

当 $x > \frac{1}{e}$ 时, $f'(x) > 0$, 函数单调递增,

故当 $x = \frac{1}{e}$ 时, 函数取得极小值 $f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$, 没有极大值.

(2)

证明: $f(x) > \frac{x}{e^x} - \frac{2}{e}$ 等价于 $x \ln x - \frac{x}{e^x} + \frac{2}{e} > 0$,

由(1)可得 $f(x) = x \ln x \geq -\frac{1}{e}$ (当且仅当 $x = \frac{1}{e}$ 时等号成立)①,

所以 $x \ln x - \frac{x}{e^x} + \frac{2}{e} \geq \frac{1}{e} - \frac{x}{e^x}$,

故只要证明 $\frac{1}{e} - \frac{x}{e^x} \geq 0$ 即可, (需验证等号不同时成立)

设 $g(x) = \frac{1}{e} - \frac{x}{e^x}$, $x > 0$ 则 $g'(x) = \frac{x-1}{e^x}$,

当 $0 < x < 1$ 时, $g'(x) < 0$, 函数单调递减, 当 $x > 1$ 时, $g'(x) > 0$, 函数单调递增,

所以 $g(x) \geq g(1) = 0$, 当且仅当 $x = 1$ 时等号成立, ②

因为①②等号不同时成立,

所以当 $x > 0$ 时, $f(x) > \frac{x}{e^x} - \frac{2}{e}$.

22. 【详解】(1) 函数 $f(x) = ae^x - \ln(x+2) + \ln a - 2$ 定义域为 $x \in (-2, +\infty)$, $f'(x) = ae^x - \frac{1}{x+2}$, $f(x)$ 在 $x = 2023$

处取得极值, 则 $f'(2023) = ae^{2023} - \frac{1}{2025} = 0$,

所以 $a = \frac{1}{2025e^{2023}}$, 此时 $f'(x) = \frac{1}{2025e^{2023}}e^x - \frac{1}{x+2}$,

令 $g(x) = f'(x) = \frac{1}{2025e^{2023}}e^x - \frac{1}{x+2}$, $x \in (-2, +\infty)$, 则 $g'(x) = \frac{1}{2025e^{2023}}e^x + \frac{1}{(x+2)^2} > 0$,

所以 $g(x)$ 在 $(-2, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f'(x)$ 在 $(-2, +\infty)$ 上单调递增, 且 $f'(2023) = 0$,

所以当 $x \in (-2, 2023)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 当 $x \in (2023, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增.

故 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-2, 2023)$, 单调递增区间为 $(2023, +\infty)$.

(2) 依题意即 $ae^x - \ln(x+2) + \ln a - 2 = 0$ 在 $(-2, +\infty)$ 上有两个根,

整理为 $e^{x+\ln a} + x + \ln a = \ln(x+2) + x + 2$, 即 $e^{x+\ln a} + x + \ln a = \ln(x+2) + e^{\ln(x+2)}$,

设函数 $h(x) = e^x + x$, 则上式为 $h(x + \ln a) = h(\ln(x+2))$,

因为 $h'(x) = e^x + 1 > 0$ 恒成立, 所以 $h(x) = e^x + x$ 单调递增, 所以 $x + \ln a = \ln(x+2)$,

所以只需 $\ln a = \ln(x+2) - x$ 在 $(-2, +\infty)$ 上有两个根,

令 $\varphi(x) = \ln(x+2) - x$, $x \in (-2, +\infty)$, 则 $\varphi'(x) = \frac{1}{x+2} - 1 = -\frac{x+1}{x+2}$,

当 $x \in (-2, -1)$ 时, $\varphi'(x) > 0$, 当 $x \in (-1, +\infty)$ 时, $\varphi'(x) < 0$,

故 $\varphi(x) = \ln(x+2) - x$ 在 $x = -1$ 处取得极大值即最大值, $\varphi(x)_{\max} = \varphi(-1) = 1$,

且当 $x \rightarrow +\infty$ 时 $\varphi(x) \rightarrow -\infty$, 当 $x \rightarrow -2$ 时 $\varphi(x) \rightarrow -\infty$,

要想 $\ln a = \ln(x+2) - x$ 在 $(-2, +\infty)$ 上有两个根, 只需 $\ln a < 1$, 解得 $0 < a < e$,

所以 a 的取值范围为 $(0, e)$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线