高三数学参考答案

1. A　因为 $B=\{-2,2\}$，所以 $A\cup B=\{-2,0,2\}$，所以 $\complement_U(A\cup B)=\{-1,1,3\}$.

2. B　因为 $z=(1+9i)(8+5i)=-37+77i$，所以 z 在复平面内对应的点位于第二象限.

3. B　由题意可得 $4+\frac{p}{2}=6$，解得 $p=4$.

4. B　$(2x-\frac{1}{\sqrt{x}})^6$ 展开式的通项为 $T_{r+1}=C_6^r(2x)^{6-r}(-\frac{1}{\sqrt{x}})^r=C_6^r2^{6-r}(-1)^rx^{6-\frac{3}{2}r}$，

令 $6-\frac{3}{2}r=0$，得 $r=4$，所以展开式中的常数项为 $C_6^42^2(-1)^4=60$.

5. C　若取出的两个数的和为奇数，则取出的两个数为一奇一偶.

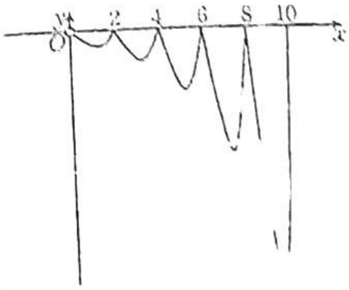
所以取出的两个数的和为奇数的概率 $P=\frac{4}{11}\times\frac{3}{5}+\frac{7}{11}\times\frac{2}{5}=\frac{26}{55}$.

6. C　设 C 的右焦点为 F'，由椭圆的定义可得 $|PF'|+|PF|=2a=8$. $|PM|+|PF|=|PM|+8-|PF'|\leqslant 8+|MF'|=9$.

7. C　设这次"打水漂"石片的弹跳次数为 x，由题意得 $20\times0.85^x<6$，得 $0.85^x<0.3$，得 $x>\log_{0.85}0.3$. 因为 $\log_{0.85}0.3=\frac{\lg 0.3}{\lg 0.85}=\frac{\lg 3-1}{\lg 85-2}=\frac{\lg 3-1}{\lg 17+\lg 5-2}=\frac{\lg 3-1}{\lg 17-\lg 2-1}\approx7.4$，所以 $x>7.4$，即 $x=8$.

8. C　由 $3[f(x)]^2+8f(x)+4=0$，可得 $f(x)=-2$ 或 $f(x)=-\frac{2}{3}$.

当 $0<x\leqslant2$ 时，$f(x)=x^2\ln\frac{x}{2}$，则 $f'(x)=x(2\ln\frac{x}{2}+1)$，当 $0<x<\frac{2}{\sqrt{e}}$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减，当 $\frac{2}{\sqrt{e}}<x\leqslant2$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增，所以当 $0<x\leqslant2$ 时，$f(x)_{\min}=f(\frac{2}{\sqrt{e}})=-\frac{2}{e}$. 由题意可知，函数 $f(x)$ 在区间 $(2n,2n+2](n\in\mathbf{N}^*)$ 上的图象是由 $f(x)$ 在 $(2n-2,2n]$ 上的图象先向右平移 2 个单位长度，再将所得图象上所有点的纵坐标伸长为原来的 2 倍得到的，作出函数 $f(x)$ 在 $(0,10]$ 上的图象，如图所示. 由图可知，方程 $f(x)=-\frac{2}{3}$，$f(x)=-2$ 在区间 $(0,10]$ 上根的个数分别为 10，6.



故方程 $3[f(x)]^2+8f(x)+4=0$ 在区间 $(0,10]$ 上的实根个数为 16.

9. ACD　因为 8 月份当地人均月收入为 2000 元，9 月份当地人均月收入的增长率为 0，所以 9 月份当地人均月收入为 2000 元，故 A 错误；

因为 10 月份当地人均月收入的增长率为 2%，所以 10 月份当地人均月收入为 $2000\times(1+2\%)=2040$ 元，故 B 正确；

因为 11 月份当地人均月收入的增长率为 1%，所以 11 月份当地人均月收入为 $2040\times(1+1\%)>2000$，故 C 错误；

因为 12 月份当地人均月收入的增长率为 -1%，所以 12 月份当地人均月收入为 $2040\times(1+1\%)(1-1\%)>2000$，故 D 错误.

10. AC　将 $y=\sin(x+\frac{\pi}{6})$ 图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{4}$，纵坐标不变，再把得到的图象向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度，得到函数 $y=\sin(4x-\frac{\pi}{3})$ 的图象，A 正确. 将 $y=\sin(x+\frac{\pi}{6})$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度，再把得到的图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{4}$，纵坐标不变，得到函数 $y=\sin(4x-\frac{\pi}{3})$ 的图象，C 正确.

11. ABD　设函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}$，易得 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增. 因为 $\frac{3}{2}=\log_2 2^{\frac{3}{2}}=\log_2\sqrt{8}<\log_2 3$，$\frac{3}{2}=\log_3 3^{\frac{3}{2}}=\log_3\sqrt{27}>\log_3 4$，$\log_3 4=1+\log_3\frac{4}{3}>1+\log_4\frac{4}{3}>1+\log_4\frac{5}{4}=\log_4 5>1$，所以 $f(\log_2 3)>f(\frac{3}{2})>f(\log_3 4)>f(\log_4 5)$，即 $a=\log_2 3+\log_3 2>d=\frac{13}{6}>b=\log_3 4+\log_4 3>c=\log_4 5+\log_5 4$.

12. BCD　因为 $AD_1 /\!/ BC_1$，所以异面直线 D_1C 和 BC_1 所成的角即为 D_1C 和 AD_1 所成的角$\angle AD_1C$. 因为 AD_1 $=AC=CD_1$，所以$\triangle AD_1C$ 为等边三角形，即$\angle AD_1C=\frac{\pi}{3}$，故 A 错误.

连接 AC_1(图略)，因为 $V_{A-BC_1D}=V_{C_1-ABD}$，所以$\frac{1}{3}S_{\triangle BC_1D}\cdot h=\frac{1}{3}S_{\triangle ABD}\cdot C_1C$.

因为 $S_{\triangle BC_1D}=2\sqrt{3}$，$S_{\triangle ABD}=2$，所以 $h=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，所以点 A 到平面 BC_1D 的距离为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$，故 B 正确.

当 P,Q 分别为线段 C_1D、AC 的中点时，则 PQ 为$\triangle BC_1D$ 的中位线，

所以 $PQ/\!/BC_1$，所以 $PQ/\!/$平面 ABC_1D_1，故 C 正确.

过 P 作 $PM\perp CD$ 于 M，过 M 作 $MQ\perp AC$ 于 Q，连接 PQ(图略)，此时 PQ 最短.

设 $DP=x$，因为$\triangle DPM$ 为等腰直角三角形，所以 $PM=\frac{\sqrt{2}}{2}x$，$CM=CD-DM=2-\frac{\sqrt{2}}{2}x$.

因为$\triangle CQM$ 也是等腰直角三角形，所以 $MQ=\frac{\sqrt{2}}{2}CM=\frac{\sqrt{2}}{2}\times(2-\frac{\sqrt{2}}{2}x)=\sqrt{2}-\frac{1}{2}x$.

因为$\triangle PMQ$ 为直角三角形，

所以 $PQ^2=PM^2+MQ^2=(\frac{\sqrt{2}}{2}x)^2+(\sqrt{2}-\frac{1}{2}x)^2=\frac{3}{4}x^2-\sqrt{2}x+2=\frac{3}{4}(x-\frac{2\sqrt{2}}{3})^2+\frac{4}{3}$，

当 $x=\frac{2\sqrt{2}}{3}$时，$PQ_{\min}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，所以 D 正确.

13. 3　因为 $a-b=(2,-1-\lambda)$，所以 $4+(\lambda+1)^2=10+1+\lambda^2$，解得 $\lambda=3$.

14. 3(或 4，5，6，只需填写一个答案即可)　圆心 $C(-3,1)$到直线 $4x+3y+2m=0$ 的距离 $d=\frac{|2m-9|}{5}$，由 $\frac{|2m-9|}{5}<1$，得 $2<m<7$，所以整数 m 的所有可能取值为 3，4，5，6.

15. $\frac{9}{16}$；$\frac{3}{4}$　设容器底面的长、宽分别为 x，$x+1$，则容器的高为$\frac{11-4(x+x+1)}{4}=\frac{7}{4}-2x$.

记容器的体积为 $V(x)$，则 $V(x)=x(x+1)(\frac{7}{4}-2x)=-2x^3-\frac{1}{4}x^2+\frac{7}{4}x(0<x<\frac{7}{8})$，因为 $V'(x)=-6x^2-\frac{1}{2}x+\frac{7}{4}=-\frac{1}{4}(2x-1)(12x+7)$，所以 $V(x)$在$(0,\frac{1}{2})$上单调递增，在$(\frac{1}{2},\frac{7}{8})$上单调递减，所以 $V(x)_{\max}=V(\frac{1}{2})=\frac{9}{16}$，此时高为$\frac{3}{4}$.

16. $\frac{3\pi}{2}$　当球的表面积最大时，该球的球心即半正多面体所在正四面体的外接球的球心，记球心为 O'. 该半正多面体所在的正四面体的高为$\sqrt{6}$. 点 O'到正六边形所在平面的距离为$\frac{\sqrt{6}}{4}$，到正三角形所在平面的距离为 $\frac{5\sqrt{6}}{12}$. 故当球的表面积最大时，该球的半径为$\frac{\sqrt{6}}{4}$，表面积为$\frac{3\pi}{2}$.

17. 解：(1)因为 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，且 $a=4$，$b=5\sqrt{2}$，$C=45°$，

所以 $c^2=16+50-2\times4\times5\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=26$，……………………………… 3 分

所以 $c=\sqrt{26}$. ……………………………………………………………… 4 分

(2)因为$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，且 $a=4$，$c=\sqrt{26}$，

所以 $\sin A=\frac{a\sin C}{c}=\frac{2\sqrt{13}}{13}$. ……………………………………………… 6 分

因为 $a<b$，所以 A 为锐角，所以 $\cos A=\sqrt{1-\sin^2A}=\frac{3\sqrt{13}}{13}$，……………………… 8 分

故 $\sin 2A=2\sin A\cos A=\frac{12}{13}$. ………………………………………………… 10 分

18. 解：(1)由题意可得 $0.002\times10+0.012\times10+0.020\times10+0.022\times10+0.020\times10+0.014\times10+a\times10=1$，……………………………………………………………………………… 2 分

解得 $a=0.010$. ……………………………………………………………………

估计该地区的观众收看《回望 2022——国内国际十大考古新闻》的平均时间为$\bar{x}=0.002\times10\times25+0.012\times10\times35+0.020\times10\times45+0.022\times10\times55+0.020\times10\times65+0.014\times10\times75+0.010\times10\times85=57.8$. ………………………………………………………… 4 分

(2)"考古热爱者"对应的频率为 $0.01\times10=\frac{1}{10}$, ………………………………………………… 5 分

用频率估计概率,可知从该地区大量电视观众中,随机抽取 1 名观众,该观众是"考古热爱者"的概率为$\frac{1}{10}$,

则 $X\sim B(10,\frac{1}{10})$,所以 X 的数学期望 $E(X)=10\times\frac{1}{10}=1$. ………………………………… 7 分

(3)根据分层抽样原则知,抽取的 10 人中,有"考古热爱者"$10\times\frac{1}{10}=1$ 人,非"考古热爱者"$10\times\frac{9}{10}=9$ 人,
……………………………………………………………………………………………………… 8 分

则 Y 所有可能的取值为 0,1. ……………………………………………………………………… 9 分

因为 $P(Y=0)=\frac{C_9^3}{C_{10}^3}=\frac{7}{10}$,$P(Y=1)=\frac{C_9^2C_1^1}{C_{10}^3}=\frac{3}{10}$, ……………………………………………… 11 分

所以 Y 的分布列为

Y	0	1
P	$\frac{7}{10}$	$\frac{3}{10}$

……………………………………………………………………………………………………… 12 分

19. 解:(1)当 $n=1$ 时,$S_1=a_2+1$,解得 $a_2=1$. ……………………………………………………… 1 分

当 $n\geqslant2$ 时,$\begin{cases}S_n=a_{n+1}+1,\\S_{n-1}=a_n+1,\end{cases}$两式相减得 $a_{n+1}=2a_n$,所以 $a_n=a_2q^{n-2}=2^{n-2}$. ……………………… 4 分

$a_1=2$ 不满足上式,故 $a_n=\begin{cases}2,n=1,\\2^{n-2},n\geqslant2.\end{cases}$ ……………………………………………………… 5 分

(2)$b_n=na_n=\begin{cases}2,n=1,\\n\cdot2^{n-2},n\geqslant2.\end{cases}$ ……………………………………………………………… 6 分

$T_n=2+2\times2^0+3\times2^1+4\times2^2+\cdots+n\cdot2^{n-2}$,

$2T_n=4+2\times2^1+3\times2^2+4\times2^3+\cdots+n\cdot2^{n-1}$. ……………………………………………… 8 分

两式相减得 $-T_n=-2+2+2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{n-2}-n\cdot2^{n-1}=(1-n)\cdot2^{n-1}-2$, ……………… 10 分

所以 $T_n=(n-1)\cdot2^{n-1}+2$. …………………………………………………………………… 12 分

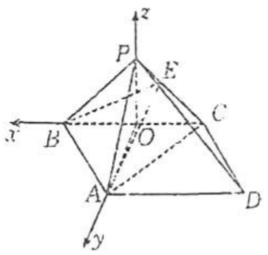
20. (1)证明:因为 $PB=PC$,O 为 BC 的中点,所以 $OP\perp BC$. ……………………………………… 1 分

因为 $OP\perp AC$,且 $AC\cap BC=C$,所以 $OP\perp$平面 $ABCD$. ……………………………………… 3 分

因为 $OP\subset$平面 PBC,所以平面 $PBC\perp$平面 $ABCD$. ……………………………………………… 4 分

(2)解:连接 OA. 因为$\triangle ABC$ 为等边三角形,所以 $OA\perp BC$,所以 OB,OA,OP 两两垂直. 以 O 为原点,$\vec{OB},\vec{OA},\vec{OP}$分别为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系. ……………………… 5 分

设 $OP=t$,则 $P(0,0,t)$,$B(1,0,0)$,$C(-1,0,0)$,$A(0,\sqrt{3},0)$,



因为$\vec{CE}=2\vec{EP}$,所以 $E(-\frac{1}{3},0,\frac{2t}{3})$, ………………………………………… 6 分

所以$\vec{BE}=(-\frac{4}{3},0,\frac{2t}{3})$,$\vec{BA}=(-1,\sqrt{3},0)$. ………………………………………… 7 分

设平面 EAB 的法向量为 $m=(x,y,z)$,

则$\begin{cases}m\cdot\vec{BE}=-\frac{4}{3}x+\frac{2t}{3}z=0,\\m\cdot\vec{BA}=-x+\sqrt{3}y=0,\end{cases}$令 $z=2$,得 $m=(t,\frac{\sqrt{3}}{3}t,2)$. …………………… 9 分

平面 ABD 的一个法向量为 $n=(0,0,1)$,

因为二面角 $E-AB-D$ 的大小为 60°,

所以 $\cos60^\circ=\frac{m\cdot n}{|m||n|}=\frac{2}{\sqrt{\frac{4}{3}t^2+4}}=\frac{1}{2}$, ……………………………………………………… 10 分

解得 $t=3$, ………………………………………………………………………………………… 11 分

所以 $V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}\times 3=2\sqrt{3}$. ………………………………………… 12 分

21. 解：(1)因为双曲线 E 的右顶点为 $A(2,0)$，所以 $a=2$. ………………………………………… 1 分

当直线 l 与双曲线 E 有且仅有一个公共点时，直线 l 平行于双曲线 E 的一条渐近线. …………… 2 分

不妨设直线 l 的方程为 $y=\frac{b}{a}(x-4)$，即 $bx-ay-4b=0$，

所以点 A 到直线 l 的距离 $d=\frac{2b}{\sqrt{b^2+a^2}}=\frac{2b}{c}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，所以 $c=\sqrt{5}b$. ………………………… 3 分

因为 $c^2=a^2+b^2$，所以 $b=1$，$c=\sqrt{5}$，

故双曲线 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$. ……………………………………………………… 5 分

(2)设直线 l 的方程为 $x=my+4$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

联立方程组 $\begin{cases}x=my+4,\\ \frac{x^2}{4}-y^2=1,\end{cases}$ 得 $(m^2-4)y^2+8my+12=0$，……………………………… 7 分

则 $y_1+y_2=-\frac{8m}{m^2-4}$，$y_1y_2=\frac{12}{m^2-4}$，$m^2-4\neq 0$ 且 $\Delta>0$. ……………………………… 8 分

因为 $\angle MQP=\angle NQP$，所以直线 l 与双曲线 E 的右支交于 M，N 两点，

所以 $y_1y_2=\frac{12}{m^2-4}<0$，即 $m^2\in[0,4)$. ……………………………………………… 9 分

因为 $\angle MQP=\angle NQP$，

所以 $k_{QM}+k_{QN}=\frac{y_1}{x_1-t}+\frac{y_2}{x_2-t}=\frac{y_1}{my_1+4-t}+\frac{y_2}{my_2+4-t}=0$，………………………… 10 分

所以 $y_1(my_2+4-t)+y_2(my_1+4-t)=2my_1y_2+(4-t)(y_1+y_2)=\frac{24m}{m^2-4}-(4-t)\frac{8m}{m^2-4}=\frac{8m(t-1)}{m^2-4}=0$，

所以 $t=1$. …………………………………………………………………………… 12 分

22. (1)解：因为 $f(x)=e^{1-x}+a(1-x)$，所以 $f'(x)=-e^{1-x}-a$. ……………………………… 1 分

当 $a\geq 0$ 时，$f'(x)\leq 0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，没有最小值，所以 $a<0$. ……………… 2 分

令 $f'(x)=-e^{1-x}-a=0$，得 $x=1-\ln(-a)$，

当 $1-\ln(-a)\leq 0$，即 $a\leq -e$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，没有最小值，

所以 $a\in(-e,0)$，…………………………………………………………………… 3 分

所以 $f(x)$ 在 $(0,1-\ln(-a))$ 上单调递减，在 $(1-\ln(-a),+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(x)_{\min}=f(1-\ln(-a))=-a+a\ln(-a)=1$. ………………………………………… 4 分

令 $g(a)=-a+a\ln(-a)$，$a\in(-e,0)$，则 $g'(a)=\ln(-a)$.

由 $g'(a)>0$，得 $-e<a<-1$；由 $g'(a)<0$，得 $-1<a<0$.

所以 $g(a)$ 在 $(-e,-1)$ 上单调递增，在 $(-1,0)$ 上单调递减，

所以 $g(a)_{\max}=g(-1)=1$，故 $a=-1$. ……………………………………………… 6 分

(2)证明：由(1)知 $f(x)=e^{1-x}+x-1$，且 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增. …… 7 分

设 $x_1<1<x_2$，

令 $F(x)=f(x)-f(2-x)=e^{1-x}-e^{x-1}+2x-2$，$x\in(-\infty,1)$，……………………………… 8 分

则 $F'(x)=-e^{1-x}-e^{x-1}+2=-(e^{1-x}+e^{x-1})+2<0$，所以 $F(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减. ………… 9 分

因为 $F(1)=0$，所以 $F(x)>0$，即 $f(x)>f(2-x)$. ………………………………………… 10 分

因为 $x_1\in(-\infty,1)$，所以 $f(x_1)>f(2-x_1)$.

因为 $f(x_1)=f(x_2)$，所以 $f(x_2)>f(2-x_1)$. ……………………………………………… 11 分

因为 x_2，$2-x_1\in(1,+\infty)$，且 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $x_2>2-x_1$，故 $x_1+x_2>2$. ………………………………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。