参考答案与试题解析

一．选择题（共8小题）

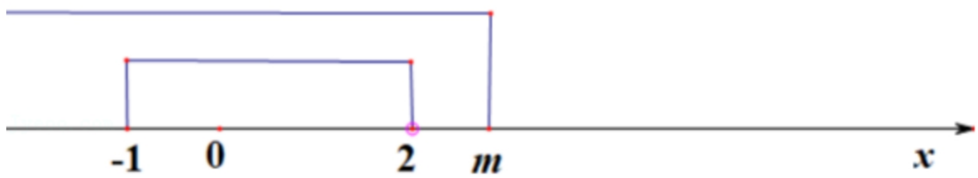
1．已知集合 $A=\{x|-1\leq x<2\}$，$B=\{y|y\leq m\}$，若 $A\cup B=B$，则 m 的取值范围是（　　）

A．$(-\infty,\ -1)$　　B．$(-\infty,\ -1]$　　C．$[2,\ +\infty)$　　D．$(2,\ +\infty)$

解：∵$A\cup B=B$，∴$A\subseteq B$，

∴$m\geq 2$．

故选：C．



2．已知 $2z+\overline{z}=6+i$（i 为虚数单位），则 $z=$（　　）

A．$2+i$　　B．$2-i$　　C．$1+i$　　D．$1-i$

解：设 $z=a+bi$（a，$b\in\mathbf{R}$），则$\overline{z}=a-bi$，

∵$2z+\overline{z}=6+i$，

∴$2(a+bi)+(a-bi)=3a+bi=6+i$，即$\begin{cases}3a=6\\b=1\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}$，

∴$z=2+i$．

故选：A．

3．某学校为了了解新高考背景下学生的选科情况，从本校选择“物理、化学、生物”、“物理、化学、地理、物理、生物、政治”三种组合共600名学生中，采用分层抽样的方法选取20名学生作为样本．已知选“物理、化学、生物”组合的学生有240人．且选“物理、生物、政治”组合的人数是选“物理、化学、地理”组合的$\frac{1}{3}$，那么样本中选“物理、化学、生物”组合的学生比选“物理、生物、政治”组合的学生多（　　）

A．4人　　B．5人　　C．6人　　D．7人

解：设选“物理、化学、地理”组合的人数为 x，

则选“物理、生物、政治”组合的人数是$\frac{1}{3}x$，

根据题意得 $x+\frac{1}{3}x=360$，

解得：$x=270$，$\therefore \frac{1}{3}x=90$，

选择“物理、化学、生物”、“物理、化学、地理”、“物理、生物、政治”

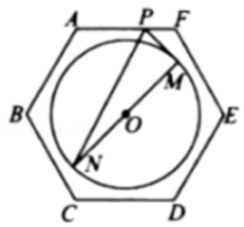
三种组合人数比是240：270：90＝8：9：3，

∴采用分层抽样的方法选取20名学生作为样本，三种组合分别抽取人数为：8，9，3，

∴样本中选“物理、化学、生物”组合的学生比选“物理、生物、政治”组合的学生多8﹣3＝5（人）.

故选：B.

4．如图正六边形 $ABCDEF$ 的边长为4，圆 O 的圆心为正六边形的中心，半径为3．若点 P 在正六边形的边上运动，MN 为圆 O 的直径，则 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$ 的取值范围是（　　）



A．[3，7]　　　　B．[6，10]　　　　C．[8，12]　　　　D．[12，16]

解：由正六边形 $ABCDEF$ 的边长为4，圆 O 的圆心为正六边形的中心，半径为3，

得正六边形 $ABCDEF$ 的内切圆半径为 $r=OA\sin 60°=4\sin 60°=2\sqrt{3}$，外接圆半径 $R=4$，

而 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OM})\cdot(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{ON})$

$=(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OM})\cdot(\overrightarrow{PO}-\overrightarrow{OM})=|\overrightarrow{PO}|^2-|\overrightarrow{OM}|^2$

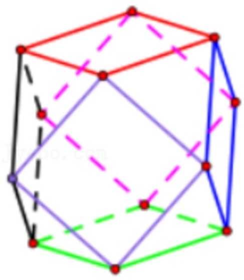
$=|\overrightarrow{PO}|^2-9$.

$\because 2\sqrt{3}\leq|\overrightarrow{PO}|\leq 4$，$\therefore 12\leq|\overrightarrow{PO}|^2\leq 16$，

则 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$ 的取值范围是[3，7].

故选：A.

5．由6个正方形和8个等边三角形围成的多面体如图所示，已知如图中正方形的边长与等边三角形的边长都为 $2\sqrt{2}$，则该几何体的体积为（　　）

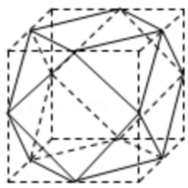


A．32　　B．$32\sqrt{2}$　　C．$\frac{160}{3}$　　D．64

解：如图所示，该几何体是由棱长为 4 的正方体沿各棱中点截去 8 个三棱锥所得到的，

该几何体的体积 $V=4\times4\times4-8\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times2=\frac{160}{3}$.

故选：C.



6．已知函数 $f(x)=\sin(x+\frac{\pi}{2})$（$x\in\mathbf{R}$），下面结论错误的是（　　）

A．函数 $f(x)$ 的最小正周期为 2π

B．函数 $f(x)$ 在区间$[0,\frac{\pi}{2}]$上是增函数

C．函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=0$ 对称

D．函数 $f(x)$ 是偶函数

解：对于函数 $f(x)=\sin(x+\frac{\pi}{2})=\cos x$（$x\in\mathbf{R}$），

它的最小正周期为 2π，故 A 正确；

显然，函数 $f(x)$ 在区间$[0,\frac{\pi}{2}]$上是减函数，故 B 错误；

由于 $f(x)$ 为偶函数，故它的图象关于直线 $x=0$ 对称，故 C、D 正确，

故选：B.

7. 设 F_1, F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，若椭圆上存在一点 P，使 $(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OF_2})\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$（$O$ 为坐标原点），且 $2|\overrightarrow{PF_1}|=3|\overrightarrow{PF_2}|$，则椭圆的离心率为（　　）

A．$\frac{2}{3}$　　B．$\frac{\sqrt{13}}{5}$　　C．$\frac{\sqrt{13}}{25}$　　D．$\frac{4}{7}$

解：设 PF_2 的中点为 Q，由$(\vec{OP}+\vec{OF_2})\cdot\vec{PF_2}=0$ 可得 $OQ\perp PF_2$，

连接 PF_1 可得 $OQ\parallel PF_1$，所以 $PF_1\perp PF_2$，

可得$|PF_2|=2a-|PF_1|$，

又因为 $2|\vec{PF_1}|=3|\vec{PF_2}|$，

所以$|PF_2|=\frac{4}{5}a$，$|PF_1|=\frac{6a}{5}$，

在 Rt$\triangle PF_1F_2$ 中，$|PF_1|^2+|PF_2|^2=|F_1F_2|$，

即$\frac{36a^2}{25}+\frac{16a^2}{25}=4c^2$，可得：$13a^2=25c^2$，

解得 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{13}}{5}$，

故选：B．

8．已知函数 $f(x)=\begin{cases}2(x-1)，x\le 1\\|x-2|-1，x>1\end{cases}$，若函数 $y=f(x)$ 的图象与 $g(x)=\log_a x$（$a>1$）的图象有 3 个交点，则 a 的取值范围是（　　）

A．$(1，+\infty)$　　B．$(1，e^2)$　　C．$(\sqrt{e}，+\infty)$　　D．$(1，\sqrt{e})$

解：如图，

当 $x>1$ 时，$f(x)$ 图像与 $g(x)$ 图像必有 1 个交点，

因为 $g'(x)=\frac{1}{xlna}$，所以 $g'(1)=\frac{1}{lna}$，

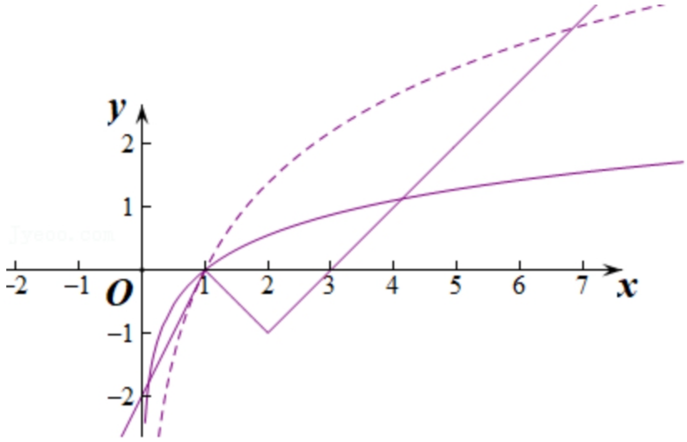
即曲线 $y=g(x)$ 在（1，0）处的切线的斜率为$\frac{1}{lna}$，

当 $x\leqslant 1$ 时，$f(x)$ 图像与 $g(x)$ 图像必须要有 2 个交点，

则要求 $2>\frac{1}{lna}$，解得 $a>\sqrt{e}$，

综上 a 的取值范围为$(\sqrt{e}，+\infty)$．

故选：C．



二．多选题（共 4 小题）

9．设正实数 a，b 满足 $a+b=1$，则（　　）

A．$\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\geq 9$　　　　B．$2^a+2^b>3$

C．$\sqrt{a}+\sqrt{b}$有最大值$\sqrt{2}$　　　　D．a^2+b^2 有最小值$\frac{1}{2}$

解：$\frac{1}{a}+\frac{4}{b}=(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{4}{b})=5+\frac{b}{a}+\frac{4a}{b}\geq 5+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{4a}{b}}=9$（当且仅当$\frac{b}{a}=\frac{4a}{b}$，即 $b=2a$ 时等号成立），

所以$\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\geq 9$，故选项 A 正确，$2^a+2^b\geq 2\sqrt{2^a\cdot 2^b}=2\sqrt{2^{a+b}}=2\sqrt{2}$（当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时等号成立），

由于 $2\sqrt{2}<3$，所以选项 B 错误；

$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}\leq\sqrt{2+2\sqrt{\frac{1}{4}}}=\sqrt{2}$，当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$时等号成立，所以 C 正确；

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=1-2ab\geq 1-2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$，当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$时等号成立，D 正确．

故选：ACD．

10．已知函数 $f(x)=\frac{3}{2}sin2x+\frac{\sqrt{3}}{2}cos2x$，则下列选项正确的有（　　）

A．$f(x)$ 的最小正周期为π

B．曲线 $y=f(x)$ 关于点$(\frac{\pi}{3}，0)$中心对称

C．f（x）的最大值为$\sqrt{3}$

D．曲线 y=f（x）关于直线 $x=\frac{\pi}{6}$对称

解：∵函数 $f(x)=\sqrt{3}sin(2x+\frac{\pi}{6})$，

由于 f（x）的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，故 A 正确；

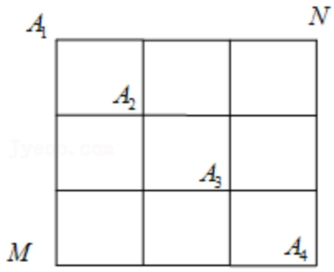
由于 $f(\frac{\pi}{3})=\sqrt{3}sin(2\times\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}\neq 0$，故 B 错误；

由于 $f(x)_{max}=\sqrt{3}3$，故 C 正确；

由于 $f(\frac{\pi}{6})=\sqrt{3}sin(2\times\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6})=\sqrt{3}$为函数最值，故 D 正确，

故选：ACD.

11．如图，在某城市中，M、N 两地之间有整齐的方格形道路网，其中 A_1、A_2、A_3、A_4 是道路网中位于一条对角线上的 4 个交汇处，今在道路网 M、N 处的甲、乙两人分别要到 N、M 处，他们分别随机选择一条沿街的最短路径，以相同的速度同时出发，直到到达 N、M 处为止，则下列说法正确的是（　　）



A．甲从 M 必须经过 A_2 到达 N 处的方法有 9 种

B．甲乙两人在 A_2 处相遇的概率为$\frac{81}{100}$

C．甲、乙两人相遇的概率为$\frac{41}{100}$

D．甲从 M 处到达 N 处的方法有 120 种

解：对于 A，甲经过 A_3 到达 N，可分为两步：

第一步：甲从 M 经过 A_3 的方法数：C_3^1种，

第二步：甲从 A_3 到 N 的方法数：C_3^1种，

所以：甲经过 A_3 的方法数为$C_3^1C_3^1$ =9 种，故 A 正确；

对于 B，由 AB 知：甲从 M 到达 N 处的方法有C_6^3 =20 种，甲经过 A_2 的方法数为$C_3^1C_3^1$ =9 种，

同理，乙从 M 到达 N 处的方法有C_6^3 =20 种，乙经过 A_2 的方法数也为：$C_3^1C_3^1$ =9 种，

∴甲、乙两人相遇经 A_2 点的方法数为：9×9＝81 种，

∴甲、乙两人相遇经 A_2 点的概率 $P=\frac{81}{20\times20}=\frac{81}{400}$，故 B 错误；

对于 C．甲、乙两人沿最短路径行走，只可能在 A_1、A_2、A_3、A_4 处相遇，

他们在 A_i（i＝1，2，3，4）相遇的走法有（C_3^{i-1}）^{4} 种方法；

∴（C_3^0）^{4}+（C_3^1）^{4}+（C_3^2）^{4}+（C_3^3）^{4}＝164，

∴甲、乙两人相遇的概率 $P=\frac{164}{400}=\frac{41}{100}$，故 C 正确．

对于 D，甲由道路网 M 处出发随机地选择一条沿街的最短路径到达 N 处需走 6 步，

共有C_6^3 =20 种方法，故 D 不正确．

故选：AC．

12．已知抛物线 x^2＝8y 的焦点为 F，P 为抛物线上一动点，直线 l 交抛物线于 A，B 两点，点 M（2，4），则下列说法正确的是（　　）

A．存在直线 l，使得 A，B 两点关于 $x+y-2$＝0 对称

B．$|PM|+|PF|$的最小值为 6

C．当直线 l 过焦点 F 时，以 AF 为直径的圆与 x 轴相切

D．若分别以 A，B 为切点的抛物线的两条切线的交点在准线上，则 A，B 两点的纵坐标之和的最小值为 4

解：由于抛物线 x^2＝8y 的焦点 F（0，2），

对于 A，假设存在直线 l，使得 A，B 两点关于直线 $x+y-2$＝0 对称，

则设直线 l 的方程为 $x-y+m$＝0，

联立$\begin{cases}x^2=8y\\x-y+m=0\end{cases}$，

所以 $x^2-8x-8m$＝0，

所以△＝（－8）^{2}－4×1×（－8m）＝64+32m＞0，即 m＞－2，

设 A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），线段 AB 的中点为 Q，

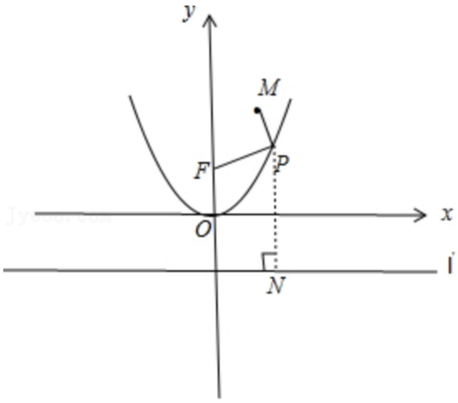
所以 x_1+x_2＝8，

所以 $x_Q=\frac{x_1+x_2}{2}$=4，$y_Q=x_Q+m$＝4+m，

点 Q 在直线 $x+y-2$＝0 上，

所以 4+4+m－2＝0，解得 m＝－6，与 m＞－2 矛盾，故 A 不正确；

对于 B：设 l' 为抛物线的准线，则准线 l' 的方程为 $y=-2$，过点 P 作 $PN\perp l'$ 于点 N，



则$|PM|+|PF|=|PM|+|PN|\geqslant 6$，当且仅当 P，M，N 三点共线时等号成立，

所以$|PM|+|PN|$的最小值为 6，故 B 正确；

对于 C：当直线 l 过焦点时，设 A（x_1，y_1），

则以 AF 为直径的圆心为 AF 的中点，$(\frac{x_1}{2},\ \frac{2+y_1}{2})$，

所以圆心到 x 轴的距离为 $d=\frac{2+y_1}{2}$，

由抛物线的定义可得$|AF|$为点 A 到准线的距离，即$|AF|=y_1+2$，

所以 $d=\frac{|AF|}{2}$，

所以当直线 l 过焦点 F 时，以 AF 为直径的圆与 x 轴相切，故 C 正确；

对于 D：设 A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），

由 $x^2=8y$，即 $y=\frac{x^2}{8}$，

所以 $y'=\frac{x}{4}$，

则切线 AT 的方程为 $y-y_1=\frac{x_1}{4}(x-x_1)$，即 $y=\frac{x_1}{4}x-\frac{x_1^2}{8}$，

同理切线 BT 的方程为 $y=\frac{x_2}{4}x-\frac{x_2^2}{8}$，

联立$\begin{cases} y=\frac{x_1}{4}x-\frac{x_1^2}{8} \\ y=\frac{x_2}{4}x-\frac{x_2^2}{8} \end{cases}$，

解得 $x=\frac{x_1+x_2}{2}$，$y=\frac{x_1x_2}{8}$，

由题意，点 T 在准线 $y=-2$ 上，

则$\frac{x_1x_2}{8}=-2$，

所以 $x_1x_2=-16$，

所以 $y_1+y_2=\frac{1}{8}(x_1^2+x_2^2)=\frac{1}{8}[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]=\frac{1}{8}(x_1+x_2)^2-\frac{x_1x_2}{4}=\frac{1}{8}(x_1+x_2)^2+4$，

所以当 $x_1+x_2=0$ 时，y_1+y_2 取得最小值 4，故 D 正确；

故选：BCD.

三．填空题（共 **4** 小题）

13．已知正项等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$S_2=2a_1+2$，$a_5=4a_3$，则数列$\{a_n\}$中不超过 2021 的所有项的和为__2046__.

解：设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q（$q>0$），

根据题意得$\begin{cases}a_1(1+q)=2a_1+2\\a_1q^4=4a_1q^2\end{cases}$，解得$\begin{cases}a_1=2\\q=2\end{cases}$，

所以 $a_n=2\times2^{n-1}=2^n$．令 $a_n\leqslant2021$，得 $2^n\leqslant2021$，解得 $n\leqslant10$.

所以$\{a_n\}$的前 10 项和为 $S_{10}=\frac{2(1-2^{10})}{1-2}=2048-2=2046$.

则数列$\{a_n\}$中不超过 2021 的所有项的和为 2046.

故答案为：2046.

14．请写出与函数 $f(x)=e^{2x}-1$ 的图象在点（0，0）处具有相同切线的一个函数 $g(x)$ =__x^2+2x（答案不唯一）__.

解：∵$f(x)=e^{2x}-1$，

∴$f'(x)|_{x=0}=(2e^{2x})|_{x=0}=2$，

∴$f(x)=e^{2x}-1$ 的图象在点（0，0）处的切线方程为：$y-0=2(x-0)$，即 $y=2x$；

若 $g(x)=x^2+2x$，则 $g(0)=0$，即 $g(x)$ 过点（0，0），

又 $g'(x)|_{x=0}=(2x+2)|_{x=0}=2$，

∴$g(x)=x^2+2x$ 的图象在点（0，0）处的切线方程为 $y=2x$；

即 $f(x)=e^{2x}-1$ 的图象与 $g(x)=x^2+2x$ 的图象在点（0，0）处的切线方程相同，

故答案为：x^2+2x（答案不唯一）.

15．点 P 是直线 $y=kx-4$ 上一动点，过点 P 作圆 C：$x^2+y^2-2y=0$ 的两条切线 PA，PB，其中 A，B 为切点，若四边形 $PACB$ 面积的最小值为 2，则实数 k 的值为__±2__.

解：圆 C：$x^2+y^2-2y=0$ 的圆心（0，1），半径是 $r=1$，

由圆的性质知：$S_{四边形PACB}=2S_{\triangle PBC}$，四边形 $PACB$ 的最小面积是 2，

∴$S_{\triangle PBC}$ 的最小值 $S=1=\frac{1}{2}rd$（d 是切线长）

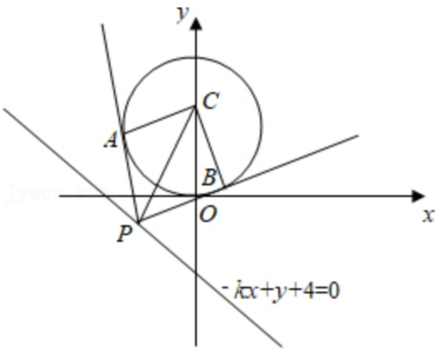
∴$d_{最小值}=2$，

圆心到直线的距离就是 PC 的最小值，

所以：$\sqrt{1^2+2^2}=\frac{5}{\sqrt{1+k^2}}$，

解得：$k=\pm2$．

故答案为：±2．



16．若 $(x+2)^{2022}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2022}x^{2022}$，则 $a_0+a_2+a_4\cdots+a_{2022}$ 被 4 除得的余数为 1 ．

解：∵ $(x+2)^{2022}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2022}x^{2022}$，

令 $x=1$，可得 $a_0+a_1+a_3+\cdots+a_{2022}=3^{2022}$，令 $x=-1$，可得 $a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_{2022}=1$，

两式相加除以 2，可得 $a_0+a_2+a_4\cdots+a_{2022}=\frac{3^{2022}+1}{2}=\frac{9^{1011}+1}{2}=\frac{(8+1)^{1011}+1}{2}$

$=\frac{C_{1011}^{0}\cdot8^{1011}+C_{1011}^{1}\cdot8^{1010}+\cdots+C_{1011}^{1010}\cdot8+1+1}{2}$．

分子中，除了最后 2 项外，其余各项都能被 8 整除，

故 $a_0+a_2+a_4\cdots+a_{2022}$ 除以 4 的余数，即$\frac{1+1}{2}$除以 4 的余数，为 1，

故答案为：1．

四．解答题（共 6 小题）

17．已知 a，b，c 分别是△ABC 三个内角 A，B，C 的对边，且$\sqrt{3}a\sin C=c\cos A+c$．

（1）求 A；

（2）在①△ABC 的面积为$\sqrt{3}$，②△ABC 的周长为 $6+2\sqrt{3}$，③$\frac{c-1}{\cos B}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，若问题中的三角形存在，求 B 的值；若问题中的三角形不存在，说明理由．

问题：已知 $b=2$，___．

解：（1）因为 $\sqrt{3}a\sin C=c\cos A+c$，利用正弦定理可得$\sqrt{3}\sin A\sin C=\sin C\cos A+\sin C$，

因为 $\sin C\neq 0$，可得$\sqrt{3}\sin A=\cos A+1$，

所以 $\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$，

因为 $A\in(0,\pi)$，$A-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$，

所以 $A-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，可得 $A=\frac{\pi}{3}$.

（2）若选①，因为△ABC 的面积为$\sqrt{3}$，

则$\frac{1}{2}\times 2\times c\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}c=\sqrt{3}$，得 $c=2$，

则 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\frac{\pi}{3}=4$，得 $a=2$，

则三角形为等边三角形，故 $B=\frac{\pi}{3}$；

若选②，△ABC 的周长为 $6+2\sqrt{3}$，$A=\frac{\pi}{3}$，$b=2$，

可得 $a+c=4+2\sqrt{3}$，

由余弦定理得 $a^2=4+c^2-2\times 2c\cos\frac{\pi}{3}$，即 $a^2=4+(4+2\sqrt{3}-a)^2-2\times(4+2\sqrt{3}-a)$，

解得 $a=2\sqrt{3}$，

由$\frac{2\sqrt{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2}{\sin B}$，得 $\sin B=\frac{1}{2}$，

由 $a>b$，可得 $B=\frac{\pi}{6}$；

若选③，$\frac{c-1}{\cos B}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 $c-1=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{a^2+c^2-4}{2ac}$，

又由余弦定理得，$a^2=4+c^2-2c$，代入上式得 $c-1=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{c^2-c}{ac}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{c-1}{a}$，

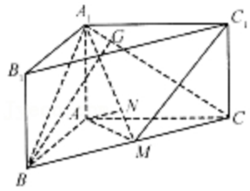
得 $c-1=0$ 或$\frac{\sqrt{3}}{2a}=1$，即 $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

若 $c=1$，则 $B=90^\circ$（舍），若 $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$，由 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{a}=2$，可知三角形不存在，因此满足③的三角形不存在.

18．如图，在侧棱垂直于底面的三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=AC=\frac{2\sqrt{3}}{3}AA_1=\frac{\sqrt{3}}{3}BC$，$M$ 是线段 BC 的中点，N 是线段 A_1M 靠近点 M 的四等分点，点 G 在线段 A_1C 上.

（1）求证：$AN\perp BG$；

（2）求二面角 $B-A_1M-C_1$ 的正弦值.



解：（1）证明：不妨设 AB＝2，则 $AC=2$，$AA_1=\sqrt{3}$，$BC=2\sqrt{3}$，$AM=1$．

因为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧棱垂直于底面，

所以 $AA_1\perp AM$.

在直角三角形 A_1AM 中，$AA_1=\sqrt{3}$，$AM=1$，

所以 A_1M＝2．

又 N 为线段 A_1M 靠近点 M 的四等分点，

所以 $MN=\frac{1}{2}$.

又分析知∠AMN＝60°，所以 $AN^2=1^2+(\frac{1}{2})^2-2\times1\times\frac{1}{2}\times cos60°=\frac{3}{4}$，

所以 $AN^2+MN^2=AM^2$，所以∠ANM＝90°，即 $A_1M\perp AN$.

因为 M 为 BC 中点，AB＝AC，所以 $AM\perp BC$．

又 $AA_1\perp BC$，$AA_1\cap AM=A$，$AM\subset$平面 A_1AM，$AA_1\subset$平面 A_1AM，

所以 $BC\perp$平面 A_1AM．又 $AN\subset$平面 A_1AM，所以 $BC\perp AN$.

又 $A_1M\perp AN$，$BC\cap A_1M=M$，$BC\subset$平面 A_1BC，$A_1M\subset$平面 A_1BC，

所以 $AN\perp$平面 A_1BC．又 $BG\subset$平面 A_1BC．

所以 $AN\perp BG$.

（2）据题设知，AM，BC，AA_1 两两相互垂直，以点 M 为坐标原点建立如图所示的空间直角坐标系，设 AB＝2，

所以 $B(-\sqrt{3}，0，0)$，$A_1(0，1，\sqrt{3})$，$M(0，0，0)$，$C_1(\sqrt{3}，0，\sqrt{3})$，

所以$\overrightarrow{MB}=(-\sqrt{3}，0，0)$，$\overrightarrow{MA_1}=(0，1，\sqrt{3})$，$\overrightarrow{MC_1}=(\sqrt{3}，0，\sqrt{3})$.

设平面 BA_1M 的一个法向量为$\vec{m}=(x_1，y_1，z_1)$，则

$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{MB}=0\\\vec{m}\cdot\overrightarrow{MA_1}=0\end{cases}\Rightarrow\Rightarrow\begin{cases}-\sqrt{3}x_1=0\\y_1+\sqrt{3}z_1=0\end{cases}$，取 z_1＝1，得$\vec{m}=(0，-\sqrt{3}，1)$.

设平面 C_1A_1M 的一个法向量$\vec{n}=(x_2，y_2，z_2)$，则

$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{MC_1}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{MA_1}=0\end{cases}\Rightarrow\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{3}x_2+\sqrt{3}z_2=0,\\ y_2+\sqrt{3}z_2=0.\end{cases}$ 取 $z_2=1$，得$\vec{n}=(-1,\ -\sqrt{3},\ 1)$.

所以 $cos\langle\vec{m},\ \vec{n}\rangle=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\frac{0\times(-1)+(-\sqrt{3})\times(-\sqrt{3})+1\times1}{\sqrt{0^2+(-\sqrt{3})^2+1^2}\times\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2+1^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,

所以二面角 $B-A_1M-C_1$ 的正弦值为$\frac{\sqrt{5}}{5}$.

19．已知无穷数列$\{a_n\}$，对于任意给定的正整数 t，设不等式$a_n-a_t\geq t^*(n-t)$对任意 $n\in\mathbf{N}^*$恒成立时 t^*的取值集合为 $T(t)$.

（1）$a_n=n^2$，求集合 $T(2)$；

（2）若$\{a_n\}$为等差数列，公差为 d，求 $T(t)$；

（3）若对任意 $t\geq2$，$t\in\mathbf{N}^*$，$T(t)$ 均为相同的单元素集合，证明：数列$\{a_n\}$为等差数列.

解：（1）因为$a_n=n^2$，$T(2)$ 为满足不等式$a_n-a_t\geq t^*(n-t)(n\in N^*)$的 t^*构成的集合，

所以有：$n^2-4\geq t^*(n-2)$，对任意 $n\in\mathbf{N}^*$恒成立

当 $n>2$ 时，上式可化为 $n+2\geq t^*$，

所以 $5\geq t^*$.

当 $n=1$ 时，上式可化为 $3\leq t^*$.

所以 $T(2)$ 为$[3,\ 5]$.

（2）若$\{a_n\}$为等差数列，公差为 d，所以$a_n-a_t=(n-t)d\geq t^*(n-t)$

当 $n>t$ 时，$t^*\leq d$

当 $n<t$ 时，$t^*\geq d$

所以 $t^*=d$，所以 $T(t)=\{d\}$

（3）对于数列$\{a_n\}$，若对任意 $t\geq2$，$t\in\mathbf{N}^*$，$T(t)$ 中均只有同一个元素，不妨设为 a.

下面证明数列$\{a_n\}$为等差数列.

当 $n=t+1$ 时，$a_{t+1}-a_t\geq a$ 对任意 $t\geq2$ 恒成立；

当 $n=t-1$ 时，有 $a_t-a_{t-1}\leq a$ 对任意 $t\geq2$ 恒成立，所以 $a_{t+1}-a_t\leq a$ 对任意 $t\geq2$ 恒成立；

所以 $a_{t+1}-a_t=a$ 对任意 $t\geq2$ 恒成立

所以数列 x_1，x_2，…，x_n，…为等差数列.

20．已知双曲线方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，$F_1$，$F_2$ 为双曲线的左、右焦点，离心率为 2，点 P 为双曲线在第一象限上的一点，且满足$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$，$|PF_1||PF_2|=6$.

（1）求双曲线的标准方程；

（2）过点 F_2 作直线 1 交双曲线于 A、B 两点，则在 x 轴上是否存在定点 Q（m，0）使得 $\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}$ 为定值，若存在，请求出 m 的值和该定值，若不存在，请说明理由．

解：（1）由题意可得 $e=\frac{c}{a}=2$，可得 $c=2a$，$b^2=c^2-a^2=3a^2$，

所以 $b=\sqrt{3}a$，

又因为 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$，$|PF_1||PF_2|=6$．

在 Rt△PF_1F_2 中，由 $|PF_1||PF_2|=6$．

由 $|PF_1|-|PF_2|=2a$，所以可得 $|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1||PF_2|=4a^2$，

而 $|PF_1|^2+|PF_2|^2=4c^2$，

所以 $4c^2-12=4a^2$，

可得 $b^2=3$，$a^2=1$，

所以双曲线的方程为：$x^2-\frac{y^2}{3}=1$；

（2）由（1）可得 F_2（2，0），

当直线 l 的斜率为 0 时，l：$y=0$，此时 A（－1，0），B（1，0），

由 M（m，0），则 $\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}=m^2-1$，

当 l 的斜率不为 0 时，设 l：$x=ty+2$，A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），

联立 $\begin{cases}x=ty+2\\3x^2-y^2=3\end{cases}$，整理可得：$(3t^2-1)y^2+12ty+9=0$，

因为 $t^2\neq\frac{1}{3}$，$y_1+y_2=\frac{-12t}{3t^2-1}$，$y_1y_2=\frac{9}{3t^2-1}$，

因为 $\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}=(x_1-m,y_1)\cdot(x_2-m,y_2)=(ty_1+2-m)(ty_2+2-m)+y_1y_2=(t^2+1)y_1y_2+(2-m)t(y_1+y_2)+(2-m)^2$

$=(t^2+1)\cdot\frac{9}{3t^2-1}+(2-m)t\cdot\frac{-12t}{3t^2-1}+(2-m)^2$

$=\frac{(12m-15)t^2+9}{3t^2-1}+(2-m)^2$，

要使 $\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}$ 为定值，则 $\frac{12m-15}{3}=\frac{9}{-1}$，解得 $m=-1$，

所以 Q（－1，0）．

21．为纪念中国共产党成立 100 周年，加深青少年对党的历史、党的知识、党的理论和路线方针的认识，激发爱党爱国热情，坚定走新时代中国特色社会主义道路的信心，某校举办了党史知识竞赛．竞赛规则是：两人一组，每一轮竞赛中，小组两人分别答 3 道题，

若答对题目不少于 5 道题，则获得一个积分．已知甲乙两名同学一组，甲同学和乙同学对每道题答对的概率分别是 p_1 和 p_2，且每道题答对与否互不影响．

（1）若$p_1=\frac{4}{5}$，$p_2=\frac{3}{4}$，求甲乙同学这一组在一轮竞赛中获得一个积分的概率；

（2）若$p_1+p_2=\frac{4}{3}$，且每轮比赛互不影响，若甲乙同学这一组想至少获得 5 个积分，那么理论上至少要进行多少轮竞赛？

解：（1）假设同学甲和同学乙答对的题目个数分别为 a_1，a_2，

所以所求概率为 $P=P$（$a_1=2$，$a_2=3$）$+P$（$a_1=3$，$a_2=2$）$+P$（$a_1=3$，$a_2=3$）

$=C_3^2(\frac{4}{5})^2\times\frac{1}{5}\times(\frac{3}{4})^3+(\frac{4}{5})^3\times C_3^2(\frac{3}{4})^2\times\frac{1}{4}+(\frac{4}{5})^3\times(\frac{3}{4})^3=\frac{297}{500}$，

所以他们在一轮竞赛中获得一个积分的概率为$\frac{297}{500}$；

（2）由（1）可知，$P=P$（$a_1=2$，$a_2=3$）$+P$（$a_1=3$，$a_2=2$）$+P$（$a_1=3$，$a_2=3$）

$=C_3^2\times{p_1}^2\times(1-p_1)\times{p_2}^3+{p_1}^3\times C_3^2\times{p_2}^2\times(1-p_2)+{p_1}^3\times{p_2}^3$，

整理可得 $P={p_1}^2{p_2}^2[3(p_1+p_2)-5p_1p_2]={p_1}^2{p_2}^2(4-5p_1p_2)$，

因为 $0\leqslant p_1\leqslant 1$，$0\leqslant p_2\leqslant 1$，且$p_1+p_2=\frac{4}{3}$，

所以$\frac{1}{3}\leq p_1\leqslant 1$，$\frac{1}{3}\leq p_2\leqslant 1$，

故$\frac{1}{9}\leq p_1p_2\leq(\frac{p_1+p_2}{2})^2=\frac{4}{9}$，

当且仅当 $p_1=p_1=\frac{2}{3}$时取等号，

则$\frac{1}{9}\leq p_1p_2\leq\frac{4}{9}$，

令 $t=p_1p_2$，则 $t\in[\frac{1}{9}，\frac{4}{9}]$，

所以 P（t）$=-5t^3+4t^2$，$t\in[\frac{1}{9}，\frac{4}{9}]$，

则 P'（t）$=-15t^2+8t$，

当 $t\in[\frac{1}{9}，\frac{4}{9}]$时，$P'$（$t$）$>0$ 恒成立，

所以当 $t=\frac{4}{9}$时，P（t）取得最大值$\frac{256}{729}$，

甲乙两同学在 n 轮比赛中获得的积分数 $X\sim B$（n，P），

则由 $nP\geqslant 5$，即 $n\cdot\frac{256}{729}\geq 5$，解得 $n\geq 5\times\frac{256}{729}\approx 14.2$，

因为 n 为正整数，所以 n 至少为 15，

故至甲乙同学这一组想至少获得 5 个积分，理论上少要进行 15 轮竞赛.

22．已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-a(x^2-x+1)$.

（1）若 $a=-2$，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（2）求证：对任意的 $a\in\mathbf{R}$，$f(x)$ 只有一个零点.

解：（1）当 $a=-2$ 时，$f(x)=\frac{1}{3}x^3+2(x^2-x+1)$，则 $f'(x)=x^2+4x-2$，

令 $f'(x)>0$，解得 $x<-2-\sqrt{6}$ 或 $x>-2+\sqrt{6}$，令 $f'(x)<0$，解得 $-2-\sqrt{6}<x<-2+\sqrt{6}$，

∴$f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty,\ -2-\sqrt{6})$，$(-2+\sqrt{6},\ +\infty)$，单调减区间为 $(-2-\sqrt{6},\ -2+\sqrt{6})$；

（2）证明：令 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-a(x^2-x+1)=0$，则 $\frac{x^3}{x^2-x+1}-3a=0$，

设 $k(x)=\frac{x^3}{x^2-x+1}-3a$，则 $k'(x)=\frac{x^2(x^2-2x+3)}{(x^2-x+1)^2}=\frac{x^2[(x-1)^2+2]}{(x^2-x+1)^2}\geq 0$，

∴$k(x)$ 单调递增，

∴$k(x)$ 至多有一个零点，

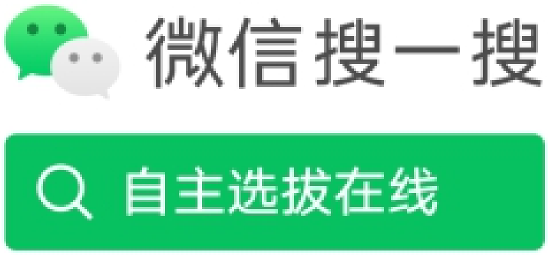
又 $f(3a+1)=6a^2+2a+\frac{1}{3}>0$，$f(3a-1)=-\frac{1}{3}<0$，

∴对任意的 $a\in\mathbf{R}$，$f(x)$ 只有一个零点

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》