2023届高三年级4月份大联考

数学参考答案及解析

一、单选题

1. C 【解析】$B=\{x|2\leqslant 2^x\leqslant 8\}=\{x|1\leqslant x\leqslant 3\}$，所以 $A\cap B=\{x|x>2\}\cap\{x|1\leqslant x\leqslant 3\}=(2,3]$. 故选C.

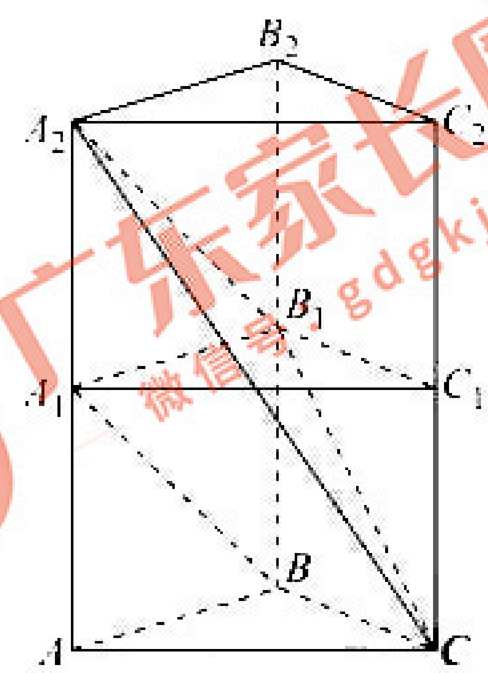
2. A 【解析】$\ln x>\ln y\Rightarrow x>y>0\Rightarrow x^3>y^3$，故充分性成立；若 $x^3>y^3$，比如 $x=-1,y=-2$，此时 $\ln x,\ln y$ 不存在，故必要性不成立，所以"$\ln x>\ln y$"是"$x^3>y^3$"的充分不必要条件. 故选A.

3. C 【解析】2021年7月至2022年7月全国居民消费价格环比增长率的极差为 $0.7\%-(-0.3\%)=1\%$，所以①正确；2021年7月至2022年7月全国居民消费价格同比增长率的中位数与众数均为1.5%，所以②正确；从同比增长率看，2022年1月与2022年2月全国居民消费价格同比增长率均为0.9%，但2021年1月与2021年2月全国居民消费价格未知，即不一定相同，所以2022年1月与2022年2月全国居民消费价格不一定相同，所以③错误；从环比增长率看，2022年6月全国居民消费价格增长率为0，所以2022年6月全国居民消费价格与2022年5月全国居民消费价格相同，所以④正确. 故选C.

4. C 【解析】$T=\frac{2\pi}{\omega}$，$f(T)=\cos(2\pi-\varphi)=\cos\varphi=\frac{1}{2}$，因为 $0<\varphi<\pi$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，则 $f(x)=\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$ $(\omega>0)$，因为 $x=\frac{7\pi}{3}$ 为函数 $f(x)$ 的极值点，所以 $\frac{7\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{3}=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，所以 $\omega=\frac{3k-1}{7},k\in\mathbf{Z}$. 又因为 $\omega>0$，所以当 $k=1$ 时，$\omega_{\min}=\frac{2}{7}$. 故选C.

5. A 【解析】因为 $f(x)=\sin(x^3-x)$ 为奇函数，所以图象关于原点对称，故排除C，D. 因为 $f(1)=0$，当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)<0$，所以排除B. 故选A.

6. D 【解析】在正三棱柱的正上方补一个与之全等的正三棱柱 $A_1B_1C_1-A_2B_2C_2$，则 $A_2B_1\parallel A_1B$，所以 $\angle A_2B_1C$（或其补角）为直线 A_1B 与 B_1C 所成的角，设正三棱柱高为 h，所以 $\cos\angle A_2B_1C=\frac{2(\sqrt{1+h^2})^2-(\sqrt{1+4h^2})^2}{2(\sqrt{1+h^2})^2}=\pm\frac{1}{3}$，所以 $h=\frac{\sqrt{5}}{2}$ 或 $h=\frac{\sqrt{2}}{4}$，所以正三棱柱的体积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}\times1\times\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{\sqrt{15}}{8}$ 或 $\frac{\sqrt{3}}{4}\times1\times\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}}{16}$. 故选D.



7. A 【解析】$\because 2\ 000<2\ 023<2\ 048$，$\therefore \lg 2\ 000<\lg 2\ 023<\lg 2\ 048$，$\therefore 3+\lg 2<\lg 2\ 023<11\lg 2$，$\therefore \frac{3+\lg 2}{2\lg 2}<\frac{\lg 2\ 023}{\lg 4}<\frac{11}{2}$，因为 $f(x)=\frac{3+x}{2x}=\frac{3}{2x}+\frac{1}{2}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，所以 $\frac{3+\lg 2}{2\lg 2}>\frac{3+\lg 3}{2\lg 3}=\log_9 3\ 000$，又因为 $\frac{11\times1.001^{0.01}}{2}>\frac{11\times1}{2}=\frac{11}{2}$，所以

$\log_9 3\ 000=\frac{3-\lg 3}{2\lg 3}<\frac{3+\lg 2}{2\lg 2}<\frac{\lg 2\ 023}{\lg 4}<\frac{11}{2}<\frac{11\times 1.001^{[illegible]}}{2}$，所以 $a<b<c$，故选 A.

8.D 【解析】因为函数 $f(x)=x^2-4x$ 表示的抛物线与 x 轴围成的面积为定值，所以直线 l、曲线 $f(x)$、x 轴及 y 轴围成的图形的面积取得最小值，等价于三角形 BOC 的面积取得最小值. 设 $P(x_0,x_0^2-4x_0)$，所以切线 l 的斜率为 $2x_0-4$，所以切线方程为 $y-(x_0^2-4x_0)=(2x_0-4)(x-x_0)$，即 $y=(2x_0-4)x-x_0^2$，所以 $x_B=\frac{x_0^2}{2(x_0-2)}>0$，$y_C=-x_0^2<0$，所以 $x_0\in(2,4)$，所以 $S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{x_0^2}{2(x_0-2)}\cdot x_0^2=\frac{x_0^4}{4(x_0-2)}$，$S_{\triangle BOC}'=\frac{x_0^3(3x_0-8)}{4(x_0-2)^2}$，令 $S_{\triangle BOC}'=0$，得 $x_0=\frac{8}{3}$，当 $x_0\in\left(2,\frac{8}{3}\right)$ 时，$S_{\triangle BOC}'<0$；当 $x_0\in\left(\frac{8}{3},4\right)$ 时，$S_{\triangle BOC}'>0$，所以当 $x_0=\frac{8}{3}$ 时，$S_{\triangle BOC}$ 取得最小值，此时 $x_B=\frac{x_0^2}{2(x_0-2)}=\frac{16}{3}$，所以 $\frac{CP}{PB}=\frac{x_0}{\frac{16}{3}-x_0}=1$. 故选 D.

二、多选题

9.AB 【解析】对于 A，因为 $z=\frac{1+3i}{1-3i}$，所以 $z=\frac{(1+3i)^2}{10}=\frac{-8+6i}{10}=\frac{-4+3i}{5}$，所以 $\bar{z}=\frac{-4-3i}{5}$，所以 A 成立；对于 B，因为 z 为纯虚数，所以 $z=bi$ $(b\in\mathbf{R},b\neq0)$，所以 $z^2=-b^2<0$，所以 B 成立；对于 C，若 $z=3+i$，则满足 $z-(2+i)=1>0$，但 $z=3+i>2+i$ 不成立，所以 C 不成立；对于 D，因为 $|z+3i|\leqslant 3$，所以动点 z 在以 $(0,-3)$ 为圆心，半径为 3 的圆周或圆内，所以集合 M 所构成区域的面积为 $\pi\times3^2=9\pi$，所以 D 不成立. 故选 AB.

10.BCD 【解析】根据题意，设直线 l 的方程为 $x=my+\frac{1}{2}$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，联立直线 l 与抛物线的方程 $\begin{cases}x=my+\frac{1}{2}\\ y^2=2x\end{cases}$，消去 x 得 $y^2-2my-1=0$，$\Delta=4m^2+4>0$，$m\in\mathbf{R}$. 由一元二次方程根与系数的关系可得 $y_1+y_2=2m$，$y_1y_2=-1$. $|AB|=\sqrt{1+m^2}\cdot|y_1-y_2|=\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=2(1+m^2)=3$，解得 $m=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 l 的斜率的绝对值为 $\sqrt{2}$，故 A 错误；$\because |AF|>|BF|$，$\therefore |AF|-|BF|=x_1+\frac{1}{2}-\left(x_2+\frac{1}{2}\right)=x_1-x_2=m(y_1-y_2)=\left|2m\sqrt{1+m^2}\right|=\sqrt{3}$，故 B 正确；$\because |AF|-|BF|=\sqrt{3}$，$|AF|+|BF|=3$，$\therefore |AF|=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$，$|BF|=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$，$\therefore |AF|\cdot|BF|=\frac{3}{2}$，故 C、D 正确. 故选 BCD.

11.ABC 【解析】因为 $|\overrightarrow{AE}|=\sqrt{3}$，所以 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{PQ}=|\overrightarrow{AE}||\overrightarrow{PQ}|\cos\alpha=\sqrt{3}|\overrightarrow{PQ}|\cos\alpha$. 当 P 点在 A 点处，因为点 Q 在由点 B 向点 C 变化时，$|\overrightarrow{AQ}|$ 由 1 增大到 $\sqrt{3}$，$\overrightarrow{AE}$ 与 $\overrightarrow{AQ}$ 的夹角 α 由 $\frac{\pi}{2}$ 缩小到 $\frac{\pi}{3}$，$\cos\alpha$ 由 0 增大到 $\frac{1}{2}$，所以 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AQ}=|\overrightarrow{AE}||\overrightarrow{AQ}|\cos\alpha=\sqrt{3}|\overrightarrow{AQ}|\cos\alpha$ 单调递增，当 Q 点在 B 点处，$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AQ}=\sqrt{3}|\overrightarrow{AQ}|\cos\alpha=0$；当 Q 点在 C 点处，$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AQ}=\sqrt{3}|\overrightarrow{AQ}|\cos\alpha=\frac{3}{2}$，此时 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{PQ}$ 的取值范围是 $\left[0,\frac{3}{2}\right]$. 同理，当 P 点在 F 点处，因为点 Q 在由点

B 向点 C 变化时，$|\overrightarrow{FQ}|$ 由 $\sqrt{3}$ 增大到 2，$\overrightarrow{AE}$ 与 $\overrightarrow{FQ}$ 的夹角 α 由 $\frac{2\pi}{3}$ 缩小到 $\frac{\pi}{2}$，$\cos\alpha$ 由 $-\frac{1}{2}$ 增大到 0，所以 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{FQ}=|\overrightarrow{AE}||\overrightarrow{FQ}|\cos\alpha=\sqrt{3}|\overrightarrow{FQ}|\cos\alpha$ 单调递增，当 Q 点在 B 点处，$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{FQ}=\sqrt{3}|\overrightarrow{FQ}|\cos\alpha=-\frac{3}{2}$；当 Q 点在 C 点处，$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{FQ}=\sqrt{3}|\overrightarrow{FQ}|\cos\alpha=0$，此时 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{PQ}$ 的取值范围是 $\left[-\frac{3}{2},0\right]$，所以 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{PQ}$ 的取值范围是 $\left[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right]$，故选 ABC.

12. AC 【解析】对于 A，因为 $2b=a+c$，所以 $b^2=\left(\frac{a+c}{2}\right)^2\geq ac$，所以 $b^2\geq ac$，所以 A 成立；对于 B，举例：$a^2=b^2+c^2$，取 $a=5$，$b=4$，$c=3$，满足 $b^2>ac$，但 $2b=a+c$，所以 B 不成立；对于 C，因为 $\tan\angle BFO>1$，所以 $\frac{b}{c}>1$，即 $b>c$，所以 $\sqrt{a^2-c^2}>c$，所以 $e<\frac{\sqrt{2}}{2}$，又 $e>0$，所以 C 成立，D 不正确. 故选 AC.

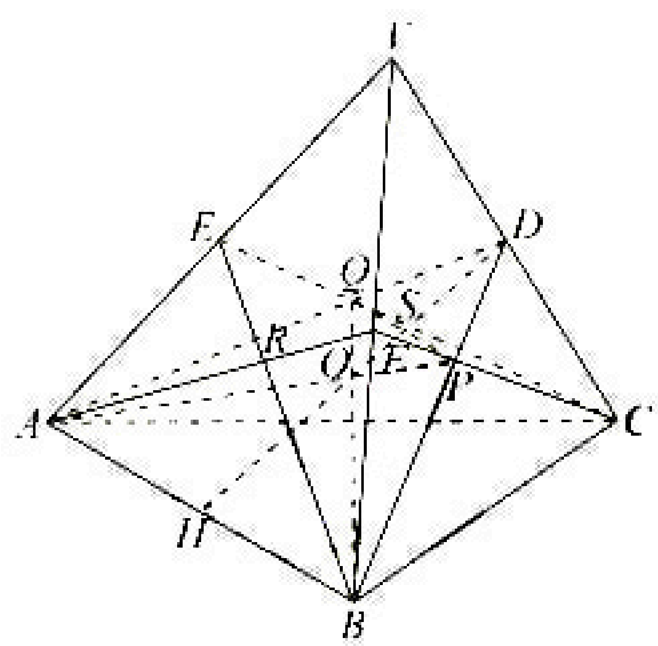
三、填空题

13. 1 【解析】因为 $P(X\leq 0)=P(X\geq 2)$，所以 $\mu=\frac{0+2}{2}=1$，故答案为 1.

14. 8 【解析】直线 $l: kx-y+2=0$ 经过点 $P(0,2)$，圆 $C: x^2+y^2-4x-12=0$ 化为标准方程为 $(x-2)^2+y^2=16$，所以 $P(0,2)$ 在圆 C 的内部，$\triangle QRC$ 的面积为 $\frac{1}{2}|QC|\cdot|RC|\sin\angle QCR=8\sin\angle QCR\leq 8$，当且仅当 $\angle QCR=\frac{\pi}{2}$，等号成立. 因为 $|PC|=2\sqrt{2}$，所以 $l\perp CP$ 时取等号. 故答案为 8.

15. $1\,000(\sqrt{3}-1)a$ 【解析】由题意可知 $AC=AE\tan\alpha$，$BD=BF\tan\beta$，所以 $BD-AC=BF\tan\beta-AE\tan\alpha=a\left(\frac{\sin\beta}{\cos\beta}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)=a\left(\frac{\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}\right)=\frac{a\sin(\beta-\alpha)}{\cos\alpha\cos\beta}$，所以可以估计 A，B 两地的距离大约为 $(BD-AC)\times 1\,000=\frac{1\,000a\sin(\beta-\alpha)}{\cos\alpha\cos\beta}$ 里，因为 $\sin(\beta-\alpha)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，$\cos\alpha\cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{4}$，所以可以估计 A，B 两地的距离大约为 $\frac{1\,000a\sin(\beta-\alpha)}{\cos\alpha\cos\beta}=1\,000(\sqrt{3}-1)a$ 里，故答案为 $1\,000(\sqrt{3}-1)a$.

16. 3 【解析】如图所示.



平面 ABD 与平面 BCE 交于 BQ，平面 ABD 与平面 ACF 交于 AP，所以 O 为 AP 与 BQ 的交点. 因为 D，E，F 分别为 VC，VA，VB 的中点，所以 P，Q 分别为三角形 VBC，VAC 的重心，所以 $\frac{DP}{PB}=\frac{DQ}{AQ}=\frac{1}{2}$，连接 DO 并延长交 AB 于 H，连接 PQ，设 PQ 与 DO 交于 S，则 $PQ\parallel AB$，$\frac{PQ}{AB}=\frac{DP}{DB}=\frac{1}{3}$，所以 $\frac{SO}{OH}=\frac{PO}{OA}=\frac{PQ}{AB}=\frac{1}{3}$，$\frac{DS}{DH}=\frac{DP}{DB}=\frac{1}{3}$，所以 $DO=OH$，设三棱锥 $V-ABC$ 的高为 h_0，三棱锥 $O-ABC$ 的高为 h，则 $\frac{h}{h_0}=\frac{1}{4}$，即 $h=\frac{h_0}{4}$，因为三棱锥 $V-ABC$ 的体积为 4，所以三棱锥 $O-ABC$ 的体积为 1，所以 M 的值 $4-1=3$. 故答案为 3.

四、解答题

17. **证明：**(1)因为 $8S_n=(a_n+2)^2$，所以 $8S_{n+1}=(a_{n+1}+2)^2$，

相减得，$8S_{n+1}-8S_n=(a_{n+1}+2)^2-(a_n-2)^2$，　　(2分)

所以 $8a_{n+1}=a_{n+1}^2-a_n^2+4(a_{n+1}-a_n)$，

所以 $a_{n+1}^2-a_n^2-4(a_{n+1}+a_n)=0$，

所以 $(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n-4)=0$，

因为 $a_{n+1}+a_n>0$，所以 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，$a_{n+1}-a_n=4$，　　(4分)

又 $n=1$ 时，$8S_1=8a_1=(a_1+2)^2=a_1^2+4a_1+4$，得 $a_1=2$，所以数列 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项，4 为公差的等差数列．　　(6分)

(2)由(1)得 $a_n=a_1+(n-1)d=2+4(n-1)=4n-2$，　　(7分)

因为 $a_n=\log_{\sqrt{3}}b_n$，所以 $b_n=(\sqrt{3})^{4n-2}=3^{2n-1}$，　　(8分)

即数列 $\{b_n\}$ 是以 3 为首项，9 为公比的等比数列，

所以 $T_n=\dfrac{3(1-9^n)}{1-9}=\dfrac{3(9^n-1)}{8}$．　　(10分)

18. **解：**(1)一次抽取两个号码，全是私家游团队的概率为 $\dfrac{C_3^2}{C_9^2}=\dfrac{1}{12}$；　　(2分)

(2)设 A 表示每次抽取一个号码，恰好抽得私家游团队，

且 $P(A)=\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$，　　(4分)

由题意知，随机变量 ξ 的所有可能取值为 0，1，2，3，4，且 $\xi\sim B\left(4,\dfrac{1}{3}\right)$，　　(7分)

$P(\xi=i)=C_4^i\left(\dfrac{1}{3}\right)^i\left(\dfrac{2}{3}\right)^{4-i}$，$i=0,1,\cdots,4$，　　(9分)

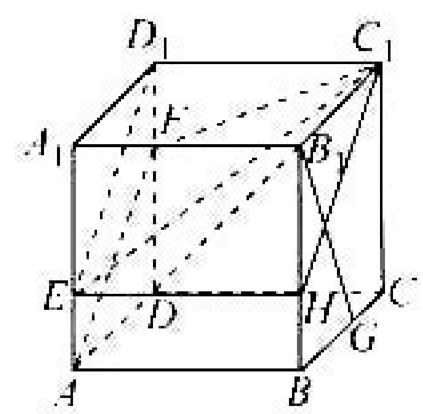
故 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3	4
P	$\dfrac{16}{81}$	$\dfrac{32}{81}$	$\dfrac{24}{81}$	$\dfrac{8}{81}$	$\dfrac{1}{81}$

(11分)

数学期望 $E(\xi)=4\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{3}$．　　(12分)

19. **解：**(1)在 BB_1 上取 H 点，使得 $BH=1$，连接 EH，HC_1．



在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，因为 $AE=1$，

所以 $EH/\!/C_1D_1$，所以 E，H，C_1，D_1 四点共面，　　(2分)

在矩形 BB_1C_1C 中，因为 $BB_1=BC=3$，$B_1H=BG=2$，

所以 $\mathrm{Rt}\triangle HB_1C_1$ 与 $\mathrm{Rt}\triangle GBB_1$ 全等，所以 $\angle BB_1G=\angle B_1C_1H$，

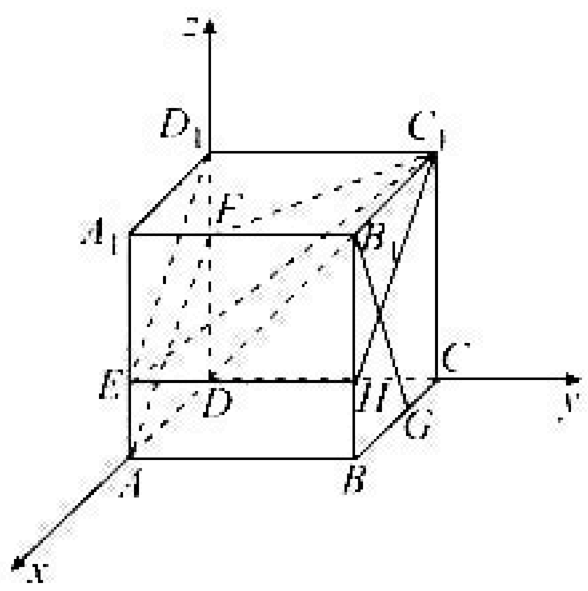
所以 $B_1G\perp C_1H$，　　(4分)

因为 $C_1D_1\perp$ 平面 BB_1C_1C，所以 $EH\perp$ 平面 BB_1C_1C，所以 $EH\perp B_1G$，

又因为 $EH\cap HC_1=H$，所以 $B_1G\perp$ 平面 EHC_1D_1，

即 $B_1G\perp$ 平面 C_1D_1E．　　(6分)

(2)因为 DA，DC，DD_1 两两垂直，所以以 D 为坐标原点，射线 DA，DC，DD_1 分别为 x，y，z 轴建立空间坐标系，



所以 $B_1(3,3,3)$，$G(1,3,0)$，由(1)得，平面 C_1D_1E 的法向量为 $\overrightarrow{B_1G}=(-2,0,-3)$．　　(8分)

又 $A(3,0,0)$，$F(0,0,2)$，$C_1(0,3,3)$，所以 $\overrightarrow{AF}=(-3,0,2)$，$\overrightarrow{AC_1}=(-3,3,3)$．

设 AC_1F 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AF}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC_1}=0\end{cases}$，

所以 $\begin{cases}-3x+2z=0\\ -3x+3y+3z=0\end{cases}$，取 $\boldsymbol{n}=(2,-1,3)$．　　(10分)

$$|\cos\theta|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{B_1G}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{B_1G}|}=\frac{|-4-9|}{\sqrt{13}\times\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{182}}{14}.$$

所以平面 C_1D_1E 与平面 AC_1F 所成的锐二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{182}}{14}$．　　(12分)

20. **解**：(1)若 $\theta\in((2n+1)\pi,2(n+1)\pi)$，

则 $\frac{\pi t}{30}\in((2n+1)\pi,2(n+1)\pi)$，　　(2分)

所以 $t\in(60n+30,60n+60)$ s，$(n\in\mathbf{N})$．　　(3分)

$\angle AOB=2\pi-\left[\frac{\pi}{30}\cdot(t-60n)\right]=2(n+1)\pi-\frac{\pi t}{30}(n\in\mathbf{N})$．

弦 AB 的长度为 $2\times5\sin\frac{\angle AOB}{2}=10\sin\left[(n+1)\pi-\frac{\pi t}{60}\right](n\in\mathbf{N})$(m)；　　(5分)

(2)当 $t=110\in(60n+30,60n+60)$ s时，得 $n=1$，

所以 $AB=10\sin\left(2\pi-\frac{110\pi}{60}\right)=10\sin\frac{\pi}{6}=5$ m，　　(7分)

在三角形 ABC 中，

由余弦定理得，$\cos\angle ABC=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\frac{5^2+8^2-7^2}{2\times5\times8}=\frac{1}{2}$，

因为 $0<\angle ABC<\pi$，所以 $\angle ABC=\frac{\pi}{3}$．　　(9分)

又 $\angle OBC=\angle ABC+\angle OBA=\frac{2\pi}{3}$，　　(10分)

在三角形 OBC 中，由余弦定理得，

$OC=\sqrt{OB^2+BC^2-2OB\cdot BC\cdot\cos\angle OBC}=\sqrt{5^2+8^2-2\times5\times8\times\left(-\frac{1}{2}\right)}=\sqrt{129}$，

所以 OC 的长为 $\sqrt{129}$ m．　　(12分)

21. **解**：(1)因为 $f(x)=\cos x-\frac{1}{e^x}$，

所以 $f'(x)=-\sin x+\frac{1}{e^x}$．

因为 $x\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$ 时，$-\sin x$，$\frac{1}{e^x}$ 均单调递减，

所以 $f'(x)=-\sin x+\frac{1}{e^x}$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递减．　　(2分)

因为 $e^2<8$，所以 $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=e^{-\frac{\pi}{6}}-\frac{1}{2}>e^{-\frac{2}{3}}-\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}-\frac{1}{2}>0$，

因为 $e^3>16$，所以 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=e^{-\frac{\pi}{4}}-\frac{\sqrt{2}}{2}<e^{-\frac{3}{4}}-\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt[4]{e^3}}-\frac{1}{2}<0$．

根据零点存在定理可得，$f'(x)$ 存在唯一零点 $x_0\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$．　　(4分)

(2) $f'(x)=-\sin x+\frac{1}{e^{x}}$，$x\in[0,2\pi]$.

当 $x\in[\pi,2\pi]$ 时，$f'(x)=\frac{1}{e^{x}}-\sin x>0$ 恒成立.

所以 $f(x)$ 在 $x\in[\pi,2\pi]$ 上单调递增.　　（6分）

当 $x\in[0,\pi)$ 时，令 $g(x)=f'(x)$，则 $g'(x)=-\frac{1}{e^{x}}-\cos x$ 单调递增.

$g'(0)=-1-\cos 0=-2<0$，

$g'\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-e^{-\frac{3\pi}{4}}-\cos\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}-e^{-\frac{3\pi}{4}}>0$.

根据零点存在定理可知，存在唯一的 $x_1\in\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$，

使得 $g'(x_1)=-e^{-x_1}-\cos x_1=0$.　　（8分）

$\therefore f'(x)=e^{-x}-\sin x$ 在 $(0,x_1)$ 上单调递减，在 (x_1,π) 上单调递增.

$f'(x_1)=e^{-x_1}-\sin x_1=-\cos x_1-\sin x_1$

$=-\sqrt{2}\sin\left(x_1+\frac{\pi}{4}\right)<0$，

$f'(0)=1>0$，$f'(\pi)=e^{-\pi}>0$.

根据零点存在定理可知，存在 $x_2\in(0,x_1)$，$x_3\in(x_1,\pi)$，使得 $f'(x_2)=0$，$f'(x_3)=0$.　　（10分）

所以当 $x\in[0,x_2)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $x\in(x_2,x_3)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in(x_3,\pi]$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.　　（11分）

又 $f(x)$ 在 $x\in[\pi,2\pi]$ 上单调递增，且图象不间断，

所以 $f(x)$ 在 $[0,x_2)$、$(x_3,2\pi]$ 上分别单调递增，在 (x_2,x_3) 上单调递减，所以 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上存在两个不同的单调递增区间，一个单调递减区间.

（12分）

22. **解**：(1) 因为双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,b>0)$ 的离心率为 $\frac{5}{3}$，

所以 $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\frac{5}{3}$.　　（1分）

双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$，即 $bx\pm ay=0$.

因为点 $(a,0)$ 到渐近线的距离为 $\frac{12}{5}$，所以 $\frac{|ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{12}{5}$.　　（2分）

联立以上关于 a,b 的方程得 $a^2=9$，$b^2=16$.

所以双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$.　　（3分）

(2) ①若直线 l 的斜率不存在，设直线 l 的方程为 $x=t$，则 $M(t,y_1)$，$N(t,-y_1)$.

所以 $\frac{t^2}{9}-\frac{y_1^2}{16}=1$，所以 $y_1^2=\frac{16t^2}{9}-16>0$，得 $t>3$ 或 $t<-3$.　　（4分）

易知点 $A(3,0)$，$\overrightarrow{AM}=(t-3,y_1)$，$\overrightarrow{AN}=(t-3,-y_1)$.

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=(t-3)^2-y_1^2=(t-3)^2+16-\frac{16}{9}t^2=-\frac{7}{9}t^2-6t+25=0$.　　（5分）

解得 $t=-\frac{75}{7}$（$t=3$ 舍去），所以直线 l 过定点 $\left(-\frac{75}{7},0\right)$.　　（6分）

②若直线 l 的斜率存在，设直线 l 的方程为 $y=kx+m$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$.

联立 $\begin{cases}y=kx+m\\16x^2-9y^2=144\end{cases}$，可得 $(16-9k^2)x^2-18kmx$

$-(9m^2+144)=0$.

所以

$$\begin{cases}\Delta=18\times18k^2m^2+4(16-9k^2)(9m^2+144)>0\\16-9k^2\neq0\end{cases},$$

得 $9k^2<16+m^2$，且 $9k^2\neq16$.

由韦达定理可得 $x_1+x_2=\frac{18km}{16-9k^2}$，$x_1x_2=-\frac{9m^2+144}{16-9k^2}$.　（8 分）

$\overrightarrow{AM}=(x_1-3,kx_1+m)$，$\overrightarrow{AN}=(x_2-3,kx_2+m)$，

则 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}$

$=(x_1-3)(x_2-3)+(kx_1+m)(kx_2+m)$

$=(k^2+1)x_1x_2+(km-3)(x_1+x_2)+m^2+9$

$=\frac{-(9m^2+144)(k^2+1)+18km(km-3)}{16-9k^2}+m^2+9=0$.

化简可得 $7m^2-54km-225k^2=0$.

即 $(7m-75k)(m+3k)=0$，　（10 分）

得 $m=-3k$ 或 $m=\frac{75}{7}k$.

若 $m=-3k$，则直线 l 的方程为 $y=k(x-3)$，此时直线 l 过点 A，即直线 l 与双曲线 C 有 3 个交点，不成立；

若 $m=\frac{75}{7}k$，则直线 l 的方程为 $y=k\left(x+\frac{75}{7}\right)$，此时直线 l 过定点 $\left(-\frac{75}{7},0\right)$.

综上所述，直线 l 过定点 $\left(-\frac{75}{7},0\right)$.　（12 分）