青岛市2021年高考统一模拟检测

数学参考答案

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。

1--8：C B D C　C B D A

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

9．ABC　　10．BD　　11．BCD　　12．ABC

三、填空题：本题共4个小题，每小题5分，共20分。

13．$a\le 2$；　　14．45°；

15．-4042；　　16．(1) 8；(2) $\dfrac{676\pi}{5}$．

四、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17．**（本小题满分10分）**

解：(1)选择条件① $2\sin A\cos B=2\sin C+\sin B$，

在ΔABC中由正弦定理得：$\cos B=\dfrac{2c+b}{2a}$，

在ΔABC中由余弦定理得：$\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{2c+b}{2a}$，

整理得：$b^2+c^2-a^2=-bc$，

所以$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\dfrac{1}{2}$，

因为A为ΔABC内角，所以$A=\dfrac{2\pi}{3}$，

选择条件② $\cos A+\cos\dfrac{A}{2}=0$，

则$2\cos^2\dfrac{A}{2}+\cos\dfrac{A}{2}-1=0$，即$(2\cos\dfrac{A}{2}-1)(\cos\dfrac{A}{2}+1)=0$，

所以$\cos\dfrac{A}{2}=\dfrac{1}{2}$或$\cos\dfrac{A}{2}=-1$，

因为$0<A<\pi$，所以$0<\dfrac{A}{2}<\dfrac{\pi}{2}$，所以$\cos\dfrac{A}{2}>0$，所以$\cos\dfrac{A}{2}=-1$不成立

所以$\cos\dfrac{A}{2}=\dfrac{1}{2}$，所以$\dfrac{A}{2}=\dfrac{\pi}{3}$，所以$A=\dfrac{2\pi}{3}$，

因为ΔABC面积为$2\sqrt{3}$，即$\dfrac{1}{2}bc\sin A=2\sqrt{3}$，

所以$bc=8$，

因为$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ABD}+S_{\Delta ACD}$，

所以$\frac{1}{2}bc\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}AD\cdot c\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}AD\cdot b\sin\frac{\pi}{3}$，

即$bc=(b+c)\cdot AD$，

所以$AD=\frac{bc}{b+c}=\frac{4}{5}$，

所以线段AD的长度为$\frac{4}{5}$

18．（本小题满分12分）

解：（1）因为$AC=4$，N为AA_1的中点，所以$CN=C_1N=4\sqrt{2}$，

所以$CN^2+C_1N^2=CC_1^{\ 2}$，所以$CN\perp C_1N$，

因为三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$为直三棱柱，所以$CC_1\perp AB$，

又因为$AB\perp AC$，$CC_1\cap AC=C$，

所以$AB\perp$平面AA_1C_1C，

因为$CN\subset$平面AA_1C_1C，所以$CN\perp AB$

因为$MN//AB$，以$CN\perp MN$，

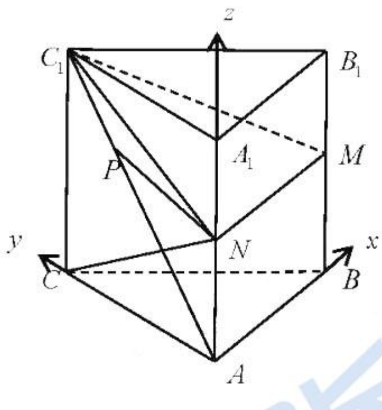
又因为$C_1N\cap NM=N$，所以$CN\perp$平面C_1MN，

（2）以A为坐标原点，AB为x轴，AC为y轴，AA_1为z轴，建立如图所示坐标系

所以$A(0,0,0)$，$B(3,0,0)$，$C(0,4,0)$，$N(0,0,4)$，$C_1(0,4,8)$，$B_1(3,0,8)$；

所以$\overrightarrow{BC}=(-3,4,0)$，$\overrightarrow{BB_1}=(0,0,8)$，设平面$BB_1C_1C$的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BB_1}=0\end{cases}$即$\begin{cases}-3x+4y=0\\ z=0\end{cases}$



所以$\vec{n}=(4,3,0)$，

设$P(x_1,y_1,z_1)$，$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AC_1}(0\le\lambda\le 1)$

所以$(x_1,y_1,z_1)=\lambda(0,4,8)$

所以$P(0,4\lambda,8\lambda)$，$\overrightarrow{NP}=(0,4\lambda,8\lambda-4)$，

当$\lambda=0$时

NP与平面BB_1C_1C所成角正弦值为0，

当$0<\lambda\le 1$时

记直线NP与平面BB_1C_1C所成角为θ，

则$\sin\theta=|\frac{\overrightarrow{NP}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{NP}||\vec{n}|}|=\frac{12\lambda}{5\sqrt{(4\lambda)^2+(8\lambda-4)^2}}=\frac{3}{5\sqrt{5-\frac{4}{\lambda}+\frac{1}{\lambda^2}}}$，

令$\frac{1}{\lambda}=t\ge 1$，所以$\sin\theta=\frac{3}{5\sqrt{t^2-4t+5}}\le\frac{3}{5}$，当且仅当$t=2$时成立，

所以直线 NP 与平面 BB_1C_1C 所成角正弦的最大值为 $\frac{3}{5}$

19．（本小题满分 12 分）

解：（1）设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，

由 $\begin{cases} a_3-a_1=8 \\ (a_2-1)^2=a_1(a_3+1) \end{cases}$ 可得：$\begin{cases} 2d=8 \\ (a_1+d-1)^2=a_1(a_1+2d+1) \end{cases}$

解得：$a_1=3$，$d=4$，

所以 $a_n=3+4(n-1)=4n-1$，

当 $n\geq 2$ 时，因为 $2S_n=b_{n+1}-3$，所以 $2S_{n-1}=b_n-3$

相减得：$2(S_n-S_{n-1})=b_{n+1}-b_n$，所以 $\frac{b_{n+1}}{b_n}=3$，

由 $b_1=3$，$2b_1=2S_1=b_2-3$ 可得：$b_2=9$，所以 $\frac{b_2}{b_1}=3$，

所以 $\{b_n\}$ 是以 $b_1=3$ 为首项，以 3 为公比的等比数列，

所以 $b_n=3^n$，

（2）（法一）列举观察知：$c_1=3,c_2=27,c_3=243$，

猜想：$c_k=3^{2k-1}$，

下面证明：

因为 $b_{n+2}-b_n=3^{n+2}-3^n=8\cdot 3^n=4(2\cdot 3^n)$ 是数列 $\{a_n\}$ 的公差 d 的正整数倍

由于 $c_2\neq b_2$，所以 $b_2,b_4,\cdots,b_{2k},\cdots$ 不是 $\{a_n\}$ 中的项

由于 $c_1=b_1=a_1=3$，所以 $b_1,b_3,\cdots,b_{2k-1},\cdots$ 是 $\{a_n\}$ 中的项，

从而 $c_k=3^{2k-1},d_k=2k-1$，

$$
\begin{aligned}
\text{所以}T_k&=\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}\\
&=\frac{1}{2}[(\frac{1}{1}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\cdots+(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1})]\\
&=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2k+1})\\
&=\frac{1}{2}-\frac{1}{4k+2}
\end{aligned}
$$

（法二）由 $a_n=b_m$ 可得：$n=\frac{1}{4}(3^m+1)$，

$$
\begin{aligned}
\text{由于}3^m+1&=(4-1)^m+1\\
&=4^mC_m^0-4^{m-1}C_m^1+4^{m-2}C_m^2-4^{m-3}C_m^3+\cdots+4C_m^{m-1}(-1)^{m-1}+(-1)^m+1
\end{aligned}
$$

$$=4[4^{m-1}C_m^0-4^{m-2}C_m^1+4^{m-3}C_m^2-\cdots+C_m^{m-1}(-1)^{m-1}]+(-1)^m+1,$$

由于$n\in N^*$，所以3^m+1必被4整除，从而$m=2k-1$，

所以$c_k=b_m=b_{2k-1}=3^{2k-1}$，

从而$d_k=2k-1$，

所以$T_k=\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

$$=\frac{1}{2}[(\frac{1}{1}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\cdots+(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1})]$$

$$=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2k+1})=\frac{1}{2}-\frac{1}{4k+2}$$

20．（本小题满分12分）

解：（1） 2×2列联表为：

	月收入不低于65百元人数	月收入低于65百元人数	合计
赞成	3	29	32
不赞成	7	11	18
合计	10	40	50

根据列联表可得K^2的观测值为

$$k=\frac{50\times(3\times11-29\times7)^2}{10\times40\times18\times32}=\frac{7225}{1152}\approx6.272>5.024$$

而$P(K^2\geq5.024)=0.025$

所以能有97.5%的把握认为“某市工薪阶层对于‘楼市限购令’的态度与月收入以6500元为分界点有关”

（2）ξ所有可能取值有0,1, 2, 3；

则$P(\xi=0)=\frac{C_5^2C_3^2}{C_{10}^2C_5^2-C_5^2C_2^2}=\frac{30}{440}=\frac{3}{44}$

$$P(\xi=1)=\frac{C_5^1C_5^1C_3^2+C_5^2C_2^1C_3^1}{C_{10}^2C_5^2-C_5^2C_2^2}=\frac{135}{440}=\frac{27}{88}$$

$$P(\xi=2)=\frac{C_5^2C_3^2+C_5^1C_5^1C_2^1C_3^1+C_5^2C_2^2}{C_{10}^2C_5^2-C_5^2C_2^2}=\frac{190}{440}=\frac{19}{44}$$

$$P(\xi=3)=\frac{C_5^2C_2^1C_3^1+C_5^1C_5^1C_2^2}{C_{10}^2C_5^2-C_5^2C_2^2}=\frac{85}{440}=\frac{17}{88}$$

所以ξ的分布列是

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{3}{44}$	$\frac{27}{88}$	$\frac{19}{44}$	$\frac{17}{88}$

所以$E(\xi)=0\times\frac{3}{44}+1\times\frac{27}{88}+2\times\frac{19}{44}+3\times\frac{17}{88}=\frac{7}{4}$

21．（本小题满分 12 分）

解：（1）由题知：$f'(x)=\frac{a}{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{2a-\sqrt{x}}{2x}$

若$a\le 0$，则$f'(x)\le 0$

所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减

若$a>0$，令$f'(x)=0$，解得$x=4a^2$

当$x\in(0,4a^2)$时，则$f'(x)>0$，所以$f(x)$在$(0,4a^2)$上单调递增

若$x\in(4a^2,+\infty)$，则$f'(x)<0$，所以$f(x)$在$(4a^2,+\infty)$上单调递减

（2）（法一）由（1）知：

若$a\le 0$，则$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，且$f(1)=0$，

所以当$0<x<1$时，$f(x)>0$，不合题意

若$a>0$，则$f(x)\le f(4a^2)=a\ln 4a^2-2a+1=2a\ln 2a-2a+1$

令$g(t)=t\ln t-t+1(t>0)$，则$g'(t)=\ln t$，

当$t\in(0,1)$时，$g'(t)<0$，所以$g(t)$在$(0,1)$上单调递减；

当$t\in(1,+\infty)$时，$g'(t)>0$，所以$g(t)$在$(1,+\infty)$上单调递增；

所以$g(t)\ge g(1)=0$

为满足题意，必有$g(2a)=0$，所以$2a=1$，解得$a=\frac{1}{2}$

（法二）由题知：$f(1)=0$，所以$f(x)\le f(1)$

所以1为$f(x)$的一个极大值点

又因为$f'(x)=\frac{a}{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$，所以$f'(1)=a-\frac{1}{2}=0$，解得$a=\frac{1}{2}$

此时$f'(x)=\frac{1}{2x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1-\sqrt{x}}{2x}$，

当$x\in(0,1)$时，$f'(x)>0$，所以$f(x)$在$(0,1)$上单调递增；

当$x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)<0$，所以$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减

所以当$a=\frac{1}{2}$时，$f(x)\le f(1)=0$

所以当 $f(x)\le 0$ 时，$a=\dfrac{1}{2}$

（3）由题意可知，$p=0.81^{10}$

由（2）知：$\dfrac{\ln x}{2}-\sqrt{x}+1\le 0$，即 $\ln x\le 2(\sqrt{x}-1)$

所以 $\ln(0.81)^{10}=10\ln(0.81)<20(\sqrt{0.81}-1)=-2$

所以 $p=(0.81)^{10}<e^{-2}$

22．(本小题满分 12 分)

解：（1）因为 $k=-\dfrac{x_n}{2y_n}$①，$y_n=kx_n+m$②，且 $2nx_n^2+4ny_n^2=1$③

由①得：$x_n=-2ky_n$，将 $x_n=-2ky_n$ 代入②得：$y_n=\dfrac{m}{1+2k^2}$④

再将 $y_n=\dfrac{m}{1+2k^2}$ 代入 $x_n=-2ky_n$ 得：$x_n=\dfrac{-2km}{1+2k^2}$⑤

将④⑤代入③得：$1+2k^2-4nm^2=0$

将直线 l 的方程代入椭圆方程 $2nx^2+4ny^2=1(n\in \mathrm{N}^*)$ 得：

$2n(1+2k^2)x^2+8nkmx+4nm^2-1=0$，所以 $\Delta=8n[(1+2k^2)-4nm^2]=0$

所以直线 l 与椭圆 C 相切

（2）（ⅰ）设 $A(x_1',y_1'),B(x_2',y_2')$，直线 l 的方程代入椭圆方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 得：

$(b^2+a^2k^2)x^2+2kma^2x+a^2(m^2-b^2)=0$

所以 $x_1'+x_2'=\dfrac{-2kma^2}{b^2+a^2k^2},x_1'x_2'=\dfrac{a^2(m^2-b^2)}{b^2+a^2k^2}$

所以 $y_1'+y_2'=k(x_1'+x_2')+2m=\dfrac{2b^2m}{b^2+a^2k^2}$

因为 W 为 AB 的中点

所以 $\dfrac{-kma^2}{b^2+a^2k^2}=\dfrac{-2km}{1+2k^2},\dfrac{b^2m}{b^2+a^2k^2}=\dfrac{m}{1+2k^2}$

两式相除得：$\dfrac{a^2}{b^2}=2$，即 $e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

（ⅱ）设原点到直线 AB 的距离为 d，则 $d=\dfrac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$

因为 $\dfrac{a^2}{b^2}=2$，所以 $x_1'+x_2'=-\dfrac{4km}{1+2k^2},x_1'x_2'=\dfrac{2(m^2-b^2)}{1+2k^2}$

又因为 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1'-x_2'|$

$$=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1'+x_2')^2-4x_1'x_2'}=\frac{2\sqrt{2}\sqrt{1+k^2}\sqrt{b^2(1+2k^2)-m^2}}{1+2k^2}$$

所以$S=\frac{1}{2}|AB|d=\frac{\sqrt{2}\sqrt{b^2(1+2k^2)m^2-m^4}}{1+2k^2}=\sqrt{2}\sqrt{\frac{b^2m^2}{1+2k^2}-(\frac{m^2}{1+2k^2})^2}$

由（1）知：$1+2k^2-4nm^2=0$，所以$\frac{1}{4n}=\frac{m^2}{1+2k^2}$

又$b^2=\frac{4}{3}+\frac{1}{4n}$，所以$S=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{b^2}{n}-\frac{1}{4n^2}}=\sqrt{\frac{2}{3n}}$，即$S^2=\frac{2}{3n}$

所以$2n\cdot\sin(S^2)=\frac{4}{3}[\frac{\sin(\frac{2}{3n})}{\frac{2}{3n}}]$，

令$f(x)=\frac{\sin x}{x}(0<x\le\frac{2}{3})$，则$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$，

再令$g(x)=x\cos x-\sin x$，则$g'(x)=-x\sin x<0$

所以$g(x)$在$[0,\frac{2}{3}]$上为减函数，从而，当$x\in(0,\frac{2}{3}]$时，$g(x)<g(0)=0$

所以$f'(x)<0$，所以$f(x)$在$(0,\frac{2}{3}]$上单调递减

所以$f(x)=\frac{\sin x}{x}\ge\frac{\sin\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}}>\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{4}$，从而$\frac{\sin\frac{2}{3n}}{\frac{2}{3n}}>\frac{3}{4}$，

所以$2n\cdot\sin(S^2)>\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}=1$