# 参考答案及解析

## 文科数学(二)

一、选择题

1. C【解析】由题意得 $A=\{x\mid -|x|+2\geqslant 0\}=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=\{y\mid y=(x-1)^2+1\}=\{y\mid y\geqslant 1\}$，所以 $A\cap B=[1,2]$.

2. A【解析】由题意得 $\bar{z}=\dfrac{9+3i}{1+2i}=\dfrac{(9+3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\dfrac{9-18i+3i+6}{5}=3-3i$，则 $z=3+3i$，所以 $z$ 在复平面内对应的点为(3,3)，位于第一象限.

3. C【解析】由题可知 $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AB}$.

4. D【解析】由题意得 $\sin(\alpha+15^\circ)\cos(\alpha-15^\circ)=7\cos(\alpha+15^\circ)\sin(\alpha-15^\circ)$.令 $A=\sin(\alpha+15^\circ)\cos(\alpha-15^\circ)$，$B=\cos(\alpha+15^\circ)\sin(\alpha-15^\circ)$，则 $A=7B$ ①.又 $A-B=\sin 30^\circ=\dfrac{1}{2}$ ②，所以联立①②，解得 $A=\dfrac{7}{12}$，$B=\dfrac{1}{12}$，故 $\sin(\alpha-15^\circ)\cos(\alpha+15^\circ)=\dfrac{1}{12}$.

5. A【解析】由题意得 $a_{n+1}-a_n=2\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$，则当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1=2\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}\right)+2\left(\dfrac{1}{n-2}-\dfrac{1}{n-1}\right)+\cdots+2\left(1-\dfrac{1}{2}\right)-1=1-\dfrac{2}{n}$，当 $n=1$ 时也满足上式，所以 $a_n=1-\dfrac{2}{n}(n\in\mathbf{N}^*)$，所以 $b_1=\langle -1\rangle=-1$，$b_2=\langle 0\rangle=0$，$b_3=\langle 1-\dfrac{2}{3}\rangle=1$，$b_4=\langle 1-\dfrac{2}{4}\rangle=1$，$b_5=b_6=\cdots=1$，故$\{b_n\}$的前 2 023 项和为 $-1+0+1+1+\cdots+1=2\ 020$.

6. C【解析】第一次循环：$a=0+1=1$，$S=0+1=1$，不满足输出条件，$i=2$；第二次循环：$a=1+2=3$，$S=1+3=4$，不满足输出条件，$i=3$；第三次循环：$a=3+3=6$，$S=4+6=10$，不满足输出条件，$i=4$；第四次循环：$a=6+4=10$，$S=10+10=20$，不满足输出条件，$i=5$；第五次循环：$a=10+5=15$，$S=20+15=35$，不满足输出条件，$i=6$；第六次循环：$a=15+6=21$，$S=35+21=56$，满足输出条件，退出循环.所以判断框中的条件可填入“$i<6$”.

7. A【解析】设经过 $n$ 层 PP 棉滤芯过滤后的大颗粒杂质含量为 $y$，则 $y=80\times\left(1-\dfrac{1}{3}\right)^n=80\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$，令 $80\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\leqslant 2$，解得 $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\leqslant\dfrac{1}{40}$，两边取常用对数得 $n\lg\dfrac{2}{3}\leqslant\lg\dfrac{1}{40}$，即 $n(\lg 3-\lg 2)\geqslant 1+2\lg 2$，因为 $\lg 2\approx 0.30$，$\lg 3\approx 0.48$，所以 $(0.48-0.30)n\geqslant 1.60$，解得 $n\geqslant\dfrac{80}{9}$，因为 $n\in\mathbf{N}^*$，所以 $n$ 的最小值为 9.

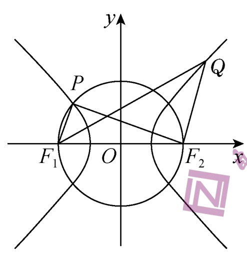
8. D【解析】设正方体的棱长为 $a$，则正方体的体积 $V_1=a^3$，因为放置一个最大的圆锥，所以圆锥的底面圆为正方体的底面的内切圆，圆锥的高为正方体的棱长，所以圆锥的体积为 $V_2=\dfrac{1}{3}\times\pi\left(\dfrac{a}{2}\right)^2\times a\approx\dfrac{a^3}{4}$，所以 $V_1:V_2\approx 4$.

9. B【解析】因为 $a=\log_4 8=\dfrac{3}{2}$，$b=\dfrac{e^2}{4}>\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}$，所以 $b>a$.令函数 $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2}$，所以 $f'(x)=\dfrac{(x-2)e^x}{x^3}$，所以 $f(x)$在区间$(2,+\infty)$上单调递增，所以 $\dfrac{e^{2\ 023}}{2\ 023^2}>\dfrac{e^2}{4}$，即 $c>b$，所以 $c>b>a$.

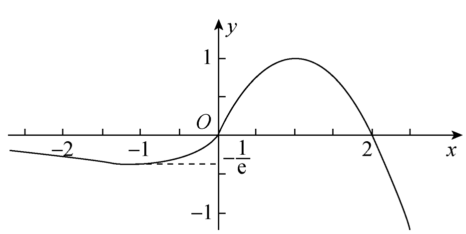
10. B【解析】因为 $f\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)=-f\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)$，所以函数图象关于点$\left(\dfrac{\pi}{3},0\right)$成中心对称，又 $f\left(\dfrac{\pi}{6}+x\right)=f\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)$，所以 $f(x)$的图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 对称，且 $f(x)$在区间$\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right)$上单调，所以 $\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{T}{4}$，即 $T=\dfrac{2\pi}{3}$，$\omega=3$.又 $3\times\dfrac{\pi}{3}+\varphi=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，$|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=0$，所以 $f(x)=\sin 3x$，所以 $f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

11. A【解析】如图，连接 $PF_2$，$QF_1$，由题意知$|F_1F_2|=2c$，$c=\sqrt{a^2+b^2}$，设$\angle PF_1F_2=\varphi$，$|PF_1|=m$，由双曲线的定义可得$|PF_2|=2a+m$.又由题可得 $PF_1\perp PF_2$，所以 $m^2+(2a+m)^2=4c^2$，即 $m^2=2b^2-2am$.在 $\mathrm{Rt}\triangle F_1PF_2$ 中，$\cos\angle PF_1F_2=\cos\varphi=\dfrac{m}{2c}$，由 $\overrightarrow{F_1P}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{F_2Q}$，得$|F_2Q|=\dfrac{3m}{2}$，由双曲线的定义可得$|F_1Q|=$

$2a+\frac{3m}{2}$.因为$\overrightarrow{F_1P}=\frac{2}{3}\overrightarrow{F_2Q}$,所以 $F_1P\parallel F_2Q$,所以$\angle QF_2F_1=\pi-\varphi$,在$\triangle F_1F_2Q$中,$\cos\angle QF_2F_1=-\cos\varphi=-\frac{m}{2c}$,又由余弦定理可得$|QF_1|^2=|QF_2|^2+|F_1F_2|^2-2|QF_2|\cdot|F_1F_2|\cdot\cos\angle QF_2F_1$,即$\left(2a+\frac{3m}{2}\right)^2=\left(\frac{3m}{2}\right)^2+(2c)^2-2\cdot\frac{3m}{2}\cdot 2c\cdot\left(-\frac{m}{2c}\right)$,所以$6am=4b^2+3m^2$.又因为$m^2=2b^2-2am$,所以$b=\sqrt{3}m$,$a=\frac{5}{2}m$,所以$c^2=a^2+b^2=\frac{37}{4}m^2$,故$c=\frac{\sqrt{37}}{2}m$,所以双曲线的离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{\frac{\sqrt{37}}{2}m}{\frac{5}{2}m}=\frac{\sqrt{37}}{5}$.




12. B 【解析】由$f^2(x)-(2+t)f(x)+2t=0$得$[f(x)-2][f(x)-t]=0$,所以$f(x)=2$或$f(x)=t$,因为当$x<0$时,$f(x)=xe^x$,所以$f'(x)=(1+x)e^x$,所以当$x\in(-\infty,-1)$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减;当$x\in(-1,0)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增,所以$f(x)\geqslant f(-1)=-\frac{1}{e}$,且$f(x)<0$.又因为当$x\geqslant0$时,$f(x)=-x^2+2x=-(x-1)^2+1$,所以$f(x)$在$x\in(0,1)$时单调递增,在$x\in(1,+\infty)$时单调递减,且$f(x)\leqslant f(1)=1$,所以作出函数$f(x)=\begin{cases}xe^x,x<0,\\-x^2+2x,x\geqslant0\end{cases}$的大致图象如图.

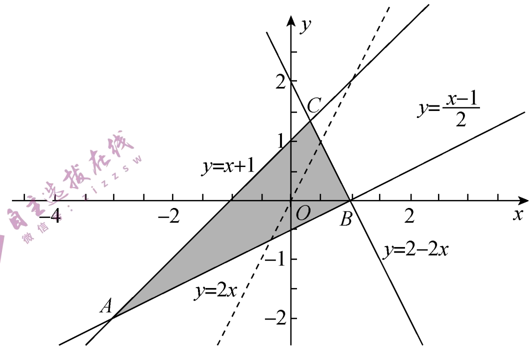



则$f(x)=2$无解,所以只有方程$f(x)=t$有3个不同的实数根,数形结合可知$-\frac{1}{e}<t<0$.

二、填空题

13. $\frac{7\sqrt{5}}{5}$ 【解析】连接$OM,CN,OC$,则$OM\perp AB$,$CN\perp DE$.过点$C$作$CF\perp OM$,垂足为点$F$,则四边形$CNMF$为矩形,所以$|CF|=|MN|$,$|CN|=|MF|$.又$|OM|=\frac{4}{\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$,$|CN|=\frac{|2-3+4|}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$,所以$|OF|=|OM|-|MF|=|OM|-|CN|=\frac{\sqrt{5}}{5}$.又$|OC|=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$,所以$|MN|=|CF|=\sqrt{|OC|^2-|OF|^2}=\sqrt{(\sqrt{10})^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{7\sqrt{5}}{5}$.

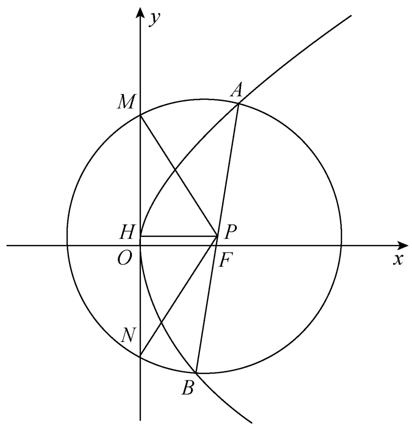
14. $-4$【解析】作出不等式组表示的平面区域如图中阴影部分所示,作直线$l_0:y=2x$,平移直线$l_0$,当直线经过点$A$时,$z$最小.由$\begin{cases}x-y+1=0,\\x-2y-1=0,\end{cases}$得$\begin{cases}x=-3,\\y=-2,\end{cases}$所以$A(-3,-2)$,所以$z=2\times(-3)-(-2)=-4$,所以$z$的最小值为$-4$.




15. $\frac{1}{3}$【解析】因为$(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b})=3\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-10\boldsymbol{b}^2=-7-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\frac{22}{3}$,所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{3}$.又$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$是单位向量,所以$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{3}$.

16. 最大 $\frac{\sqrt{3}}{2}$【解析】如图,由$y^2=4x$,可知$F(1,0)$,设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$P(x_0,y_0)$,易知$x_0\geqslant1$,所以$|AB|=x_1+x_2+2$,过点$P$作$PH\perp MN$于点$H$.设$\angle PMH=\theta$,则$\sin\theta=\frac{x_0}{\frac{x_1+x_2+2}{2}}=\frac{x_0}{x_0+1}=1-\frac{1}{x_0+1}$,所以当$x_0$取最小值时,$\sin\theta$最小,因为$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,所以当$\sin\theta$最小时,$\theta$最小,$\angle MPN$最大,又$x_0$的最小值为1,所以$\sin\theta=\frac{1}{2}$,所以$\theta=\frac{\pi}{6}$,所

以$\angle MPN=\pi-2\times\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}$，所以 $\sin\angle MPN=\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.




三、解答题

17. **解**：(1)设数列$\{a_n\}$的公差为$d$，

由$a_3=5$，得$a_1+2d=5$.　　(1分)

因为$S_6=(a_2+1)S_3$，

所以$6a_1+15d=(a_1+d+1)(3a_1+3d)$，

整理得$2(a_1+2d)+d=(a_1+2d+1-d)(a_1+2d-d)$，　　(3分)

所以$10+d=(6-d)(5-d)$，即$d^2-12d+20=0$，

解得$d=2$或$d=10$.

当$d=2$时，$a_1=1$，所以$a_2=a_1+d=3>0$，符合题意；

当$d=10$时，$a_1=-15$，所以$a_2=a_1+d=-5<0$，不符合题意，舍去，　　(4分)

所以$a_n=2n-1$.　　(5分)

(2)由(1)知$S_n=\frac{(2n-1+1)n}{2}=n^2$，则$\frac{n+S_n}{3^n}=\frac{n^2+n}{3^n}$，　　(6分)

所以$T_n=\frac{1^2+1}{3}+\frac{2^2+2}{3^2}+\frac{3^2+3}{3^3}+\cdots+\frac{n^2+n}{3^n}$，

则$\frac{1}{3}T_n=\frac{1^2+1}{3^2}+\frac{2^2+2}{3^3}+\frac{3^2+3}{3^4}+\cdots+\frac{n^2+n}{3^{n+1}}$，　　(7分)

两式相减，得$\frac{2}{3}T_n=2\times\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\frac{4}{3^4}+\cdots+\frac{n}{3^n}\right)-\frac{n^2+n}{3^{n+1}}$.

令$P_n=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\frac{4}{3^4}+\cdots+\frac{n}{3^n}$，

则$\frac{1}{3}P_n=\frac{1}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\frac{3}{3^4}+\frac{4}{3^5}+\cdots+\frac{n}{3^{n+1}}$，　　(9分)

两式相减，得$\frac{2}{3}P_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\cdots+\frac{1}{3^n}-\frac{n}{3^{n+1}}=\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{3^{n+1}}}{1-\frac{1}{3}}-\frac{n}{3^{n+1}}=\frac{1}{2}-\frac{2n+3}{2\times3^{n+1}}$，

所以$P_n=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{4\times3^n}$，

所以$\frac{2}{3}T_n=2\times\left(\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{4\times3^n}\right)-\frac{n^2+n}{3^{n+1}}$，

所以$T_n=\frac{9}{4}-\frac{2n+3}{4\times3^{n-1}}-\frac{n^2+n}{2\times3^n}=\frac{9}{4}-\frac{2n^2+8n+9}{4\times3^n}$.　　(12分)

18. (1)**证明**：由题知$AP=AB=2$，$PB=2\sqrt{2}$，

所以$AP^2+AB^2=PB^2$，所以$AP\perp AB$.　　(1分)

又因为平面$PAB\perp$平面$ABCD$，且交线为$AB$，

所以$AP\perp$平面$ABCD$，

又$CD\subset$平面$ABCD$，所以$AP\perp CD$，　　(3分)

连接$AC$，因为四边形$ABCD$是边长为2的菱形，$\angle ABC=60°$，所以$\triangle ACD$为等边三角形.

又因为$E$为$CD$的中点，所以$CD\perp AE$，

又$AP\cap AE=A$，$AP\subset$平面$PAE$，$AE\subset$平面$PAE$，

所以$CD\perp$平面$PAE$.　　(5分)

(2)**解**：设点$A$到平面$PEF$的距离为$h$，连接$AF$，

则$V_{三棱锥A\text{-}PEF}=V_{三棱锥E\text{-}PAF}$，　　(6分)

因为$AB\parallel CD$，所以$AE\perp AB$，又由(1)知$AE\perp AP$，

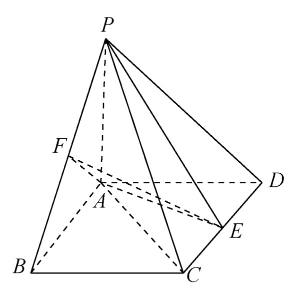
所以$AE\perp$平面$PAB$，$AE\perp PF$，$AE\perp AF$，

易求得$AF=\sqrt{2}$，$AE=\sqrt{3}$，　　(8分)

又由$PF\perp AE$，$PF\perp AF$，知$PF\perp$平面$AEF$，且$PF=\sqrt{2}$，$FE=\sqrt{5}$，　　(10分)

所以$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}PF\times FE\times h=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times PF\times AF\times AE$，

即$h=\frac{AF\times AE}{FE}=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{30}}{5}$.　　(12分)




19. **解**：(1)由直方图可知$(0.008+0.016+0.02+a+0.044+0.04+0.028+0.008)\times5=1$，

解得$a=0.036$.　　(2分)

因为$(0.008+0.016+0.02+0.036)\times5=0.4<0.5$，

$(0.008+0.016+0.02+0.036+0.044)\times5=0.62>0.5$，　　(3分)

所以学员该项技术的评价指标的中位数在[80,85)内.

设学员该项技术的评价指标的中位数为 $m$，则 $(m-80)\times0.044+0.4=0.5$，

解得 $m\approx82.3$. （4 分）

(2)评价指标的平均数为 $(62.5\times0.008+67.5\times0.016+72.5\times0.02+77.5\times0.036+82.5\times0.044+87.5\times0.04+92.5\times0.028+97.5\times0.008)\times5=81.6$，（6 分）

所以平均数与中位数之差的绝对值为 $|81.6-82.3|=0.7<1$，所以有显著稳定性. （7 分）

(3)由(1)可知评价指标不低于 80 的频率为 $(0.044+0.04+0.028+0.008)\times5=0.6$，

所以评价指标不低于 80 的样本数为 $100\times0.6=60$. （9 分）

由已知可得 $2\times2$ 列联表如下：

| 队伍 | 优秀 | 良好 | 总计 |
|---|---|---|---|
| $A$ 队 | 40 | 10 | 50 |
| $B$ 队 | 20 | 30 | 50 |
| 总计 | 60 | 40 | 100 |

（10 分）

$K^2=\dfrac{100\times(40\times30-20\times10)^2}{50\times50\times60\times40}=\dfrac{50}{3}>6.635$，（11 分）

所以有 99%的把握认为“评价指标是否优秀与训练时间有关”. （12 分）

20. **解**：(1)由题意得 $2a=2\times2b$，即 $a=2b$ ①. （2 分）

当点 $P$ 为 $C$ 的上顶点或下顶点时，$\triangle ABP$ 的面积取得最大值，所以 $\dfrac{1}{2}\times2b\times a=8$，即 $ab=8$ ②.

联立①②，得 $a=4,b=2$.

故 $C$ 的方程为 $\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{x^2}{4}=1$. （4 分）

(2)$\triangle ABD$ 与 $\triangle AQE$ 的面积之比为定值.

由(1)可得 $A(-2,0)$，$B(2,0)$，由题意设直线 $l:x=my+1$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$.

联立 $\begin{cases}x=my+1,\\ \dfrac{y^2}{16}+\dfrac{x^2}{4}=1,\end{cases}$ 得 $(4m^2+1)y^2+8my-12=0$，

则 $\Delta=64m^2+48(4m^2+1)>0$，

$y_1+y_2=-\dfrac{8m}{4m^2+1}$，$y_1y_2=-\dfrac{12}{4m^2+1}$，（6 分）

所以 $my_1y_2=\dfrac{3}{2}(y_1+y_2)$. （8 分）

直线 $AM$ 的方程为 $y=\dfrac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，令 $x=4$，得 $y=\dfrac{6y_1}{x_1+2}$，即 $D\left(4,\dfrac{6y_1}{x_1+2}\right)$.

同理可得 $E\left(4,\dfrac{2y_2}{x_2-2}\right)$. （9 分）

故 $\triangle ABD$ 与 $\triangle AQE$ 的面积之比为

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle AQE}}=\frac{\frac{1}{2}|AB||y_D|}{\frac{1}{2}|AQ||y_E|}=\frac{4|y_D|}{3|y_E|}=\left|\frac{4y_1(x_2-2)}{y_2(x_1+2)}\right|=\left|\frac{4y_1(my_2-1)}{y_2(my_1+3)}\right|=4\times\left|\frac{my_1y_2-y_1}{my_1y_2+3y_2}\right|=4\times\left|\frac{\frac{3}{2}(y_1+y_2)-y_1}{\frac{3}{2}(y_1+y_2)+3y_2}\right|=4\times\left|\frac{\frac{1}{2}y_1+\frac{3}{2}y_2}{\frac{3}{2}y_1+\frac{9}{2}y_2}\right|=\frac{4}{3},$$

即 $\triangle ABD$ 与 $\triangle AQE$ 的面积之比为定值 $\dfrac{4}{3}$. （12 分）

21. (1)**解**：由 $f(x)=(a-1)x+\ln x$，得 $f'(x)=a-1+\dfrac{1}{x}=\dfrac{(a-1)x+1}{x}$，（1 分）

当 $a\geqslant1$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增. （2 分）

当 $a<1$ 时，$f'(x)=\dfrac{(a-1)\left(x-\frac{1}{1-a}\right)}{x}$，

所以当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{1-a}\right)$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增；

当 $x\in\left(\dfrac{1}{1-a},+\infty\right)$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减. （3 分）

综上，当 $a\geqslant1$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增；当 $a<1$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\dfrac{1}{1-a}\right)$ 上单调递增，在区间 $\left(\dfrac{1}{1-a},+\infty\right)$ 上单调递减. （4 分）

(2)**证明**：由 $\varphi(x)=g(x)-f(x)$ 得 $\varphi(x)=\dfrac{1}{2}ax^2-(a-1)x-\ln x$，

所以 $\varphi'(x)=ax-(a-1)-\dfrac{1}{x}=\dfrac{ax^2-(a-1)x-1}{x}=\dfrac{(ax+1)(x-1)}{x}$，（5 分）

因为 $a>2$，所以 $\dfrac{ax+1}{x}>0$，

所以当 $x\in(0,1)$ 时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$ 单调递减；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 单调递增，

所以当 $x=1$ 时，$\varphi(x)_{\min}=\varphi(1)=-\dfrac{1}{2}a+1$，（7 分）

因为 $a>2$，所以 $\varphi(1)<0$，下面证明 $\varphi(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上与 $(1,+\infty)$ 上分别存在一个零点，

因为 $\varphi(2)=2a-2(a-1)-\ln2=2-\ln2>0$，

所以在区间$(1,+\infty)$上存在唯一零点$x_1$,且$\varphi(x_1)=0$.

（9分）

因为$\varphi(x)=\frac{1}{2}a(x^2-2x)+x-\ln x$,

当$x\in(0,1)$时,$-1<x^2-2x<0$,

所以$\varphi(x)>-\frac{1}{2}a+x-\ln x$,

所以$\varphi\left(e^{-\frac{1}{2}a}\right)>-\frac{1}{2}a+e^{-\frac{1}{2}a}-\ln\left(e^{-\frac{1}{2}a}\right)=e^{-\frac{1}{2}a}>0$,

所以$\varphi(x)$在区间$(0,1)$上存在唯一零点$x_2$,且$\varphi(x_2)=0$,（11分）

所以当$a>2$时,函数$\varphi(x)=g(x)-f(x)$有两个不同的零点.（12分）

22. **解:**(1)由$\begin{cases}x=2-t,\\y=3+t\end{cases}$($t$为参数)消去参数$t$,

得$y=5-x$,

所以直线$l$的普通方程为$x+y-5=0$.（3分）

由$\rho^2+4\rho\sin\theta+12-a=0$得$x^2+y^2+4y+12-a=0$,即$x^2+(y+2)^2=a-8$,

所以曲线$C$的直角坐标方程为$x^2+(y+2)^2=a-8$.

（5分）

(2)由(1)知曲线$C$的直角坐标方程为$x^2+(y+2)^2=a-8$,

因为$a>8$,所以曲线$C$表示圆心为$(0,-2)$,半径为$\sqrt{a-8}$的圆.

要使直线$l$与曲线$C$有公共点,必须满足:

圆心到直线$l$的距离$d=\frac{|0-2-5|}{\sqrt{1+1}}\leqslant\sqrt{a-8}$,（7分）

解得$a\geqslant\frac{65}{2}$,即实数$a$的取值范围为$\left[\frac{65}{2},+\infty\right)$.

（10分）

23. **解:**(1)因为$f(x)=2|x+2|-|x-5|=\begin{cases}-x-9,x\leqslant-2,\\3x-1,-2<x<5,\\x+9,x\geqslant5,\end{cases}$（2分）

所以$f(x)\geqslant4$等价于$\begin{cases}x\leqslant-2,\\-x-9\geqslant4\end{cases}$或$\begin{cases}-2<x<5,\\3x-1\geqslant4\end{cases}$或$\begin{cases}x\geqslant5,\\x+9\geqslant4,\end{cases}$

解得$x\leqslant-13$或$\frac{5}{3}\leqslant x<5$或$x\geqslant5$,

所以$x\leqslant-13$或$x\geqslant\frac{5}{3}$,（4分）

所以不等式$f(x)\geqslant4$的解集为$(-\infty,-13]\cup\left[\frac{5}{3},+\infty\right)$.（5分）

(2)由(1)可知当$x=-2$时,$f(x)$有最小值,且为$f(-2)=-7$,（7分）

所以$f(x)\geqslant a^2+2a-10$恒成立等价于$-7\geqslant a^2+2a-10$恒成立,

所以$a^2+2a-3\leqslant0$,解得$-3\leqslant a\leqslant1$,

即实数$a$的取值范围为$[-3,1]$.（10分）