

武汉市 2024 届九所重点中学第一次联考

数学试卷

武汉市第一中学命制

2023.10.14

本试卷共 4 页，22 小题，全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

★祝考试顺利★

注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答：用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并上交。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合  $A = \{x \mid \cos x = 0\}$ ， $B = \{y \mid y^2 - 8y - 20 \leq 0\}$ ，则  $A \cap B$  的元素个数为  
A. 4                      B. 5                      C. 2                      D. 0
2. 与  $(\sqrt{2}, -\sqrt{3})$  垂直的单位向量是  
A.  $\pm(\frac{\sqrt{3}}{5}, \frac{\sqrt{2}}{5})$       B.  $\pm(\frac{\sqrt{2}}{5}, \frac{\sqrt{3}}{5})$       C.  $\pm(\frac{\sqrt{10}}{5}, \frac{\sqrt{15}}{5})$       D.  $\pm(\frac{\sqrt{15}}{5}, \frac{\sqrt{10}}{5})$
3. 以下满足  $|z(z+1)| < 3$  的虚数  $z$  是  
A.  $-\sqrt{3}i$               B.  $-\frac{5}{1+2i}$               C.  $\frac{(1+\sqrt{2}i)^2}{2}$               D.  $\frac{2}{1-i}$
4. 多项式  $(ax+1)^6$  的  $x^2$  项系数比  $x^3$  项系数多 35，则其各项系数之和为  
A. 1                      B. 243                      C. 64                      D. 0
5. 在集合  $\{2, 3, 4, 5, 6\}$  的所有非空真子集中任选一个，其元素之和为偶数的概率是  
A.  $\frac{3}{5}$                       B.  $\frac{7}{15}$                       C.  $\frac{1}{2}$                       D.  $\frac{8}{15}$

数学试卷 第1页（共4页）



6. 如图, 三棱台  $ABC-A_1B_1C_1$  中,  $BC=AC$ , 现在以下四项中选择一个, 可以证明  $AA_1=BB_1$  的条件有



- ①  $CC_1 \perp AB$ ;                      ②  $A_1B_1 = A_1C_1$ ;  
③  $\angle C_1CA = \angle C_1CB$ ;            ④  $\angle A_1AC = \angle B_1BC$ ;

- A. 4 个                      B. 3 个                      C. 2 个                      D. 1 个

7. 抛物线  $C: y^2 = 3x$  的焦点为  $F$ , 顶点为  $O$ , 其上两点  $A, B$  满足  $OA \perp OB$ ; 过  $O$  点作  $OC \perp AB$  于  $C$ , 则  $|CF|$  的取值范围是

- A.  $(0, 3]$                       B.  $\left[\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{9}{4}\right]$                       C.  $\left(\frac{3}{4}, \frac{9}{4}\right]$                       D.  $\left(\frac{3}{4}, 3\right]$

8. 求值:  $\frac{2 \sin 80^\circ \cos 20^\circ}{1 + 4 \cos 20^\circ \sin^2 50^\circ} =$

- A.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$                       B.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$                       C. 1                      D.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 将三角函数  $h(x) = \sqrt{3} \cos^2 x - \sin x \cos x$  经如下变换后得到  $y = \sin x$  的图象:

- ① 将图象向右平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位;    ② 将图象向左平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位;  
③ 将图象向下平移  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  个单位;    ④ 将图象上所有点的横坐标扩大至原来的 2 倍;

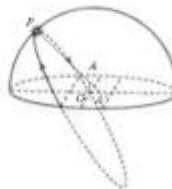
以下变换顺序正确的是

- A. ④①③                      B. ④③①①                      C. ②②③④                      D. ③①④

10. 等比数列  $\{a_n\}$  和函数  $f(x)$  满足  $a_1 = 1, f(n) = a_n$ , 则以下数列也为等比数列的是

- A.  $b_n = f(2n)$                       B.  $b_n = f\left(\frac{n}{2}\right)$                       C.  $b_n = [f(n)]^2$                       D.  $b_n = f(n^2)$

11. 如图, 在平整的地面上任一点  $O$  处观测点  $P$  处的太阳时, 可以将太阳一日的运动轨迹看作一个圆, 且这个圆在以  $O$  为球心, 半径很大的球面上. 白天观测到的轨迹是其在地面以上的部分, 在点  $O$  处立一根杆  $OA$  ( $A$  也可看作球心), 它在地面上形成日影  $OA'$ , 且  $P, A, A'$  三点共线, 则白天时点  $A'$  在地面上运动的轨迹可能是



- A. 一个抛物线                      B. 一条直线                      C. 一个半椭圆                      D. 双曲线的一支

12. 已知  $f(x) = \begin{cases} ax - \sin x & x \in [0, 6\pi) \\ 3\pi a(1 - \cos x) & x \in [6\pi, 7\pi] \end{cases}$ , 若它的图象恒在  $x$  轴上方, 则
- $f(x)$  的单调递增区间为  $(0, 6\pi)$
  - 方程  $f(x) = m$  可能有两个实数根
  - 若函数  $f(x)$  在  $x = x_0$  处的切线经过原点, 则  $x_0 = \tan x_0$
  - 过  $f(x)$  图象上任何一点, 最多可作函数  $f(x)$  的 8 条切线

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 写出一个焦距为 3 的椭圆的标准方程: \_\_\_\_\_.
14. 平面直角坐标系中有一直线  $l: y = kx (k > 0)$ , 用斜二测画法画出平面的直观图, 在直观图中直线  $l$  恰为  $x$  轴和  $y$  轴的角平分线, 则  $k =$  \_\_\_\_\_.
15. 已知矩形  $ABCD$  和另一点  $E$ ,  $|AB| = 4$ ,  $|AD| = 9$ , 且  $\overrightarrow{DE} = \lambda \overrightarrow{DC} (\lambda > 0)$ , 连接  $AE$  交直线  $BC$  于点  $F$ , 若  $\triangle BEF$  的面积为 6, 则  $\lambda =$  \_\_\_\_\_.
16. 一张圆形餐桌前有  $n (n \geq 3)$  个人, 每个人面前及餐桌正中央均各摆放一道菜. 现规定每人只能在相邻两人或餐桌中心的三道菜中随机夹取一道菜, 每个人都各夹过一次菜后, 记未被夹取过的菜肴数为  $X_n$ , 则  $E(X_3) =$  \_\_\_\_\_,  $E(X_n)$  的通项公式为 \_\_\_\_\_.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程及演算步骤.

17. (10 分)
- 等差数列  $\{a_n\}$  中,  $a_2 = -1$ ,  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 且  $S_6 = 5S_3$ ,
- 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;
  - 证明: 对任意正数  $k$ , 均存在  $n (n \in \mathbb{N}_+, n > 3)$  使得  $\frac{S_n}{a_n} < \frac{n^2}{n+k}$  成立.
18. (12 分)
- 已知函数  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 9$ ,
- 求  $f(x)$  的极值;
  - 作  $f(x)$  在  $x = x_0$  处的切线交  $f(x)$  的图象于另一点  $(x_1, b)$ , 若  $|x_0 - x_1| = 6$ , 求  $l$  的斜率.
19. (12 分)

数学试卷 第3页 (共4页)



$\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 且  $B = \frac{\pi}{6}$ ;  $AB$  边上有一点  $D$  ( $D$  不与三角形的顶点重合) 满足  $2b \cos \angle ACD = c$ ,

- (1) 求  $C$  的取值范围; (2) 若  $CD = c$ , 求  $A$ .

20. (12 分)

在能源和环保的压力下, 新能源汽车将成为未来的发展方向. 某市大力推广新能源汽车, 成果显著, 该市近 6 年的新能源汽车保有量数据如下表,

年份代号 $x$	1	2	3	4	5	6
保有量 $y$ (万辆)	1	1.8	2.7	4	5.9	9.1

(1) 记  $x = i (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$  时对应的汽车保有量为  $y_i$ , 其相较于去年的增长量为  $z_i (i \geq 2)$ , 分析发现变量  $z$  和  $y$  有线性关系, 试建立变量  $z$  和  $y$  的回归方程 (精确到 0.01);

(2) 根据 (1) 问的结果分析: ①  $y = cx + d$ ; ②  $y = ce^{dx} + f$ ; ③  $y = cx^2 + d$  当中哪一个更适合作为汽车保有量  $y$  与年份  $x$  的回归方程类型? 判断并说明理由.

附: 对于一组数据  $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_n, v_n)$ , 其回归直线  $\hat{v} = a + \hat{b}u$  的斜率和

$$\text{截距的最小二乘估计分别为 } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})}{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2}, \quad a = \bar{v} - \hat{b}\bar{u}.$$

21. (12 分)

空间中的两平行平面  $\alpha$  与  $\beta$  之间的距离为 4, 边长为 2 的等边三角形  $\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1$  分别在平面  $\alpha, \beta$  中, 且它们中心的连线垂直于平面  $\alpha$ ; 若  $AA_1 = BB_1 = CC_1$  恒成立,

- (1) 证明:  $AA_1, BB_1, CC_1$  两两夹角相等;  
(2) 当四面体  $ACC_1A_1$  的体积最大时, 求 (1) 问中夹角的余弦值.

22. (12 分)

双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  经过点  $P(\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2})$ , 且点  $P$  到双曲线  $C$  两渐近线的距离之比为 4: 1,

- (1) 求  $C$  的方程;  
(2) 过点  $P$  作不平行于坐标轴的直线  $l_1$  交双曲线于另一点  $Q$ , 作直线  $l_2 \parallel l_1$  交  $C$  的渐近线于两点  $A, B$  ( $A$  在第一象限), 使  $|AB| = |PQ|$ , 记  $l_1$  和直线  $QB$  的斜率分别为  $k_1, k_2$ ,  
(i) 证明:  $k_1 \cdot k_2$  是定值;  
(ii) 若四边形  $ABQP$  的面积为 5, 求  $k_1 - k_2$ .

数学试卷 第4页 (共4页)



## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京, 旗下拥有网站 (网址: [www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)) 和微信公众平台等媒体矩阵, 用户群体涵盖

全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线

