

秘密★启用前

2023 年高考冲刺模拟试卷

数学试题（八）

本试卷共 4 页，22 题。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在试题卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答：用签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后，请将本试题卷和答题卡一并上交。

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | \log_2(2x-2) < 2\}$ ，函数 $\{5, 2, a\}$ ，且 $A \cap B$ 有 4 个子集，则实数 a 的取值范围是
A. $(1, 3)$ B. $(-\infty, 2) \cup (2, 3)$ C. $(1, 2) \cup (2, 3)$ D. $(-\infty, 3)$
2. 设 i 为虚数单位， $a \in \mathbf{R}$ ，“复数 $z = a^2 + 2a + 2 + \frac{5i^{10}}{1-2i}$ 是纯虚数”是“ $a = -1$ ”的
A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件
3. 在平面直角坐标系中，横、纵坐标都是整数的点称为格点，顶点都是格点的多边形叫做格点多边形。奥地利数学家皮克在研究格点多边形时，发现一个计算其面积的公式： $S = a + \frac{b}{2} - 1$ ，其中 a 表示多边形内部的格点数， b 表示多边形边界上的格点数。已知一个格点三角形的边界上和内部的格点数的和为 12，面积为 9，若从这 12 个格点中随机抽取 2 个格点，则至少有 1 个格点在三角形内部的概率为
A. $\frac{14}{33}$ B. $\frac{19}{33}$ C. $\frac{1}{11}$ D. $\frac{10}{11}$
4. 已知平面向量 $a = (m, 2)$ ， $b = (-2, 1)$ ， $c = (2, n)$ ， $a \cdot b = 0$ ，若向量 c 在向量 $a + b$ 方向上投影向量的坐标为 $(-1, 3)$ ，则 $a \cdot c =$
A. 10 B. 6 C. -6 D. -10
5. 已知函数 $f(x) = 4\cos \omega x \sin(\omega x + \frac{\pi}{2}) - \sqrt{3} (\omega > 0)$ ，将 $f(x)$ 的图象上所有点的横坐标变为原来的 2 倍（纵坐标不变），再将所得图象向左平移 $\frac{\pi}{6\omega}$ 个单位长度，得到 $y = g(x)$ 的图象，若 $y = g(x)$ 在区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3})$ 上没有零点，则 ω 的最大值为

A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{4}{5}$

D. $\frac{6}{7}$

6. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x^2+1} - \ln(|x|+2023)$, 则 $a = f(\ln \frac{10}{19})$, $b = f(\frac{1}{e^{0.1}})$, $c = f(\frac{9}{10})$ 的大小关系是

A. $c > b > a$

B. $b > a > c$

C. $a > b > c$

D. $a > c > b$

7. 已知点 F_1, F_2 分别是椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点, 点 P 是椭圆 E 上的一点, 若 $\triangle PF_1F_2$ 的内心是 G , 且 $S_{\triangle GPF_1} = \frac{16}{9} S_{\triangle GF_1F_2} - S_{\triangle GPF_2}$, 则椭圆 E 的离心率为

A. $\frac{8}{9}$

B. $\frac{9}{16}$

C. $\frac{4}{9}$

D. $\frac{7}{16}$

8. 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $AB=BC=AC=PA=PB=2$, $PC=\sqrt{3}$, M 是 PA 的中点, N 为三棱锥 $P-ABC$ 表面上的动点, 且总满足 $MN \perp AB$, 设点 N 的轨迹的长度为 S_1 , 三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为 S_2 , 则 $\frac{S_1}{S_2} =$

A. $\frac{27\sqrt{3}}{104\pi}$

B. $\frac{27\sqrt{3}}{26\pi}$

C. $\frac{9\sqrt{3}}{56\pi}$

D. $\frac{9\sqrt{3}}{14\pi}$

二、多项选择题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 下列命题正确的有

A. 已知角 α 的终边经过点 $P(3, t)$, 且 $\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = \frac{3}{5}$, 则 $t = -\frac{9}{4}$

B. 8 个样本数据 4, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 9 的第 75 百分位数为 7.5

C. 若随机变量 X 服从正态分布 $N(4, \sigma^2)$, 若 $P(X < 2a - 3) = P(X > a + 5)$, 则 $a = 2$

D. 等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 + a_4 + a_7 = 3$, $a_3 + a_6 + a_9 = 12$, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 9 项和为 21

10. 已知函数 $f(x) = \sin(2023\pi - x) - \sin 3x$, 下列说法正确的有

A. $f(x)$ 为奇函数

B. $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{3\pi}{2}$ 对称

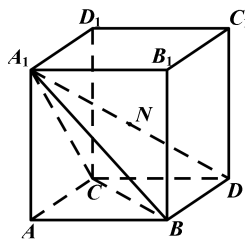
C. $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{3}$

D. $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上所有零点之和为 7π

11. 如图, 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, N 是 A_1D 的中点, M 是平面 A_1BC 上一点, 则下列说法正确的是

A. MN 的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

B. 若 $MA + MN = 2$, 则点 M 的轨迹是圆



C. 若 $MA = \frac{\sqrt{13}}{3}$, 则点 M 的轨迹围成图形的面积为 $\frac{4\pi}{9}$

D. 存在点 M , 使得异面直线 D_1C_1 与 BM 所成的角为 30°

12. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的单调函数, 对于任意 $x \in \mathbb{R}$, 满足 $f[f(x) - 2^x - 4x] = 14$, 方程 $f(|x|) - k|x| - 2 = 0$ 有且仅有 4 个不相等的实数根, 则正整数 k 的取值可以是

- A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知 $f(x) = -C_{10}^1(3-x) + C_{10}^2(3-x)^2 - C_{10}^3(3-x)^3 + \cdots + C_{10}^{10}(3-x)^{10}$, 则 $f(x)$ 的展开式中常数项为_____.

14. 某圆弧形拱桥的水面跨度是 16 m, 拱高为 4 m. 现有一船宽 12 m, 在水面以上部分高 1.6 m, 通行无阻. 近日水位暴涨了 1.2 m, 为此, 必须加重船载, 降低船身, 当船身至少降低_____m 时, 船才能安全通过桥洞.

15. 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, $f(3x-1)$ 是奇函数, 且 $f(x-1)$ 的图象关于 $x=1$ 对称. 若曲线 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线斜率为 2, 则曲线 $f(x)$ 在 $x=2023$ 处的切线方程为_____.

16. 过抛物线 $C: x^2 = 12y$ 的顶点 O 作两条互相垂直的直线交抛物线 C 于 A, B 两点, 点 M 为点 O 在直线 AB 上的射影, N 是圆 $E: (x-6)^2 + (y+2)^2 = 4$ 上的动点, 则 $|MN|$ 的最大值为_____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边长分别为 a, b, c , 已知

$$\frac{2\cos B}{b} + \frac{2\cos C}{c} = \frac{\sin A}{\sqrt{5}\sin B}.$$

(1) 求边 c ;

(2) 若 $\sqrt{2}\sin(B+C) = \sin 2A$, $\sin(B-A) = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. (12 分) 已知数列 $\{3^{n-1}a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = \frac{n-1}{3}$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = \frac{1}{3^{n+1}(1-a_n)(1-a_{n+1})}$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 证明: $T_n < \frac{1}{4}$.

19. (12 分) 某医院用 a, b 两种疗法治疗某种疾病, 采用有放回简单随机抽样的方法对治疗情况进行检查, 得到了如下数据:

	未治愈	治愈	合计
疗法 a	15	52	67
疗法 b	6	63	69
合计	21	115	136

- (1) 根据小概率值 $\alpha = 0.005$ 的独立性检验, 分析 b 种疗法的效果是否比 a 种疗法效果好;
- (2) 为提高临床医疗安全性, 提高疾病的治愈率及好转率, 同时降低医疗费用, 降低患者医疗负担. 该医院对于 a, b 两种疗法进行联合改进, 研究了甲、乙两种联合治疗方案, 现有 6 位症状相同的确诊患者, 平均分成 A, B 两组, A 组用甲方案, B 组用乙方案. 一个疗程后, A 组中每人康复的概率都为 $\frac{14}{15}$, B 组 3 人康复的概率分别为 $\frac{19}{20}, \frac{9}{10}, \frac{9}{10}$. 若一个疗程后, 每康复 1 人积 2 分, 假设认定: 积分期望值越高疗效越好, 请问甲、乙哪种联合治疗方案更好?

参考公式及数据: $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

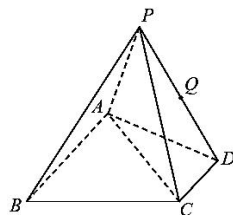
α	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
χ_α	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

$$\frac{(15 \times 6 - 52 \times 63)^2}{67 \times 69 \times 21 \times 115} = 0.9092, \quad \frac{(15 \times 63 - 52 \times 6)^2}{67 \times 69 \times 21 \times 115} = 0.0359, \quad \frac{(15 \times 52 - 6 \times 63)^2}{67 \times 69 \times 21 \times 115} = 0.0145.$$

20. (12 分) 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是梯形, $AB \parallel CD$, $AB \perp BC$, $AB = 2CD$, 侧棱 $PA = PB = PC$.

(1) 证明: 平面 $PAC \perp$ 平面 $ABCD$;

(2) 若 $PA = AB = BC$, Q 是 PD 的中点, 求二面角 $Q-BC-D$ 的正弦值.



21. (12 分) 已知 A, F 分别为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右顶点和右焦点, D, E 在双曲线 C 的右支上且位于 x 轴两侧的两点, 当 $DF \perp x$ 轴时, 直线 AD 的斜率为 3, 且 $\triangle ADF$ 的面积为 $\frac{3}{2}$.

(1) 求双曲线 C 的方程;

(2) 直线 DA, EA 分别与直线 $x = \frac{1}{2}$ 交于点 P, Q , 若 $PF \perp QF$, 求证: D, E, F 三点共线.

22. (12 分) 已知函数 $f(x) = |x + \ln x| - axe^x (a > 0)$.

(1) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线经过原点, 求 a 的值;

(2) 若 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上存在最小值, 求 a 的取值范围.

免费增值服务介绍



- ✓ 学科网 (<https://www.zxxk.com/>) 致力于提供K12教育资源方服务。
- ✓ 网校通合作校还提供学科网高端社群出品的《老师请开讲》私享直播课等增值服务。



扫码关注学科网

每日领取免费资源

回复“ppt”免费领180套PPT模板

回复“天天领券”来抢免费下载券



- ✓ 组卷网 (<https://zujuan.xkw.com>) 是学科网旗下智能题库，拥有小初高全学科超千万精品试题，提供智能组卷、拍照选题、作业、考试测评等服务。



扫码关注组卷网

解锁更多功能