

绝密★启用前

2023年3月高三调研考试

数 学

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $M = \{x | e^{x-1} > 1\}$, $N = \{x | x^2 - 2x < 0\}$, 则 $M \cup N =$

- A. $(0, 1)$ B. $(1, 2)$ C. $(0, +\infty)$ D. $(2, +\infty)$

2. 已知复数 $(1+2i)(z-1) = -2+i$, 则 $|z| =$

- A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. $\sqrt{3}$ D. 3

3. 已知 $\tan \alpha = \frac{1}{2}$, 则 $\frac{\cos \alpha}{\cos(\alpha + \frac{\pi}{4})} =$

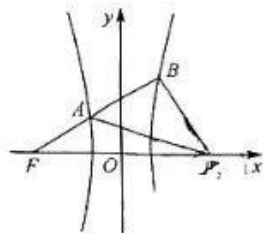
- A. $-2\sqrt{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{2}$

4. 中国古代中的“礼、乐、射、御、书、数”合称“六艺”。“礼”主要指德育，“乐”主要指美育，“射”和“御”就是体育和劳动，“书”指各种历史文化知识，“数”指数学。某校国学社计划开展“六艺”讲座活动，每艺安排一次讲座，共讲六次。讲座次序要求“礼”在第一次，“射”和“数”相邻，“射”和“御”不相邻，则“六艺”讲座不同的次序共有

- A. 36 B. 48 C. 54 D. 84

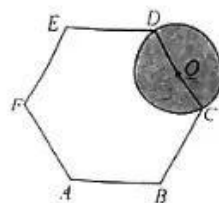
5. 如图所示， F_1, F_2 是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点，双曲线 C 的右支上存在一点 B 满足 $BF_1 \perp BF_2$, BF_1 与双曲线 C 的左支的交点 A 平分线段 BF_1 . 则双曲线 C 的离心率为

- A. 3 B. $2\sqrt{3}$
C. $\sqrt{13}$ D. $\sqrt{15}$



6. 如图，在边长为2的正六边形 $ABCDEF$ 中，动圆 Q 的半径为1，圆心在线段 CD (含端点) 上运动， P 是圆 Q 上及其内部的动点，设向量 $\vec{AP} = m\vec{AB} + n\vec{AF}$ (m, n 为实数)，则 $m+n$ 的取值范围是

- A. $(1, 2]$ B. $[2, 5]$
C. $[3, 5]$ D. $[5, 6]$



【高三数学 第1页(共6页)】

7. 图1是第七届国际数学教育大会的会徽图案,会徽的主体图案是由如图2所示的一连串直角三角形演化而成的,其中 $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \dots = A_7A_8 = 1$. 如果把图2中的直角三角形继续作下去,记 OA_1, OA_2, \dots, OA_n 的长度构成的数列为 $\{a_n\}$, 则 $a_{25} =$



图1

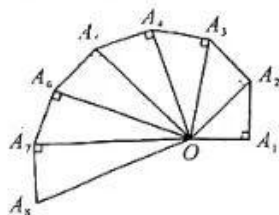


图2

- A. 25 B. 24 C. 5 D. 4
8. 在正四棱台 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = 2A_1B_1, AA_1 = \sqrt{3}$. 当该正四棱台的体积最大时, 其外接球的表面积为
- A. $\frac{33\pi}{2}$ B. 33π C. $\frac{57\pi}{2}$ D. 57π

二、多项选择题: 本题共4小题, 每小题5分, 共20分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得5分, 部分选对的得2分, 有选错的得0分.

9. 将函数 $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度得到 $y = g(x)$ 的图象, 则

- A. $y = f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$ 上是减函数
 B. 由 $f(x_1) = f(x_2) = \frac{1}{2}$ 可得 $x_1 - x_2$ 是 π 的整数倍
 C. $y = g(x)$ 是奇函数
 D. 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, 8\pi)$ 上有8个零点
10. 已知圆 $M: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$, 直线 $l: x + y + 2 = 0$, P 为直线 l 上的动点, 过点 P 作圆 M 的切线 PA, PB , 切点为 A, B , 则下列结论正确的是
- A. 当 $\angle APB$ 最大时, $|PA| = 2\sqrt{2}$
 B. 当 $\angle APB$ 最大时, 直线 AB 的方程为 $x + y = 0$
 C. 四边形 $MAPB$ 面积的最大值为 8
 D. 四边形 $MAPB$ 面积的最小值为 4

11. 若直线 $y = mx + n$ 与曲线 $f(x) = \sqrt{x} (x > 0)$ 相切, 则

- A. $n \ln m \leq \frac{1}{4e}$ B. $m + n \geq 2$ C. $mn = 1$ D. $m > 0$
12. 已知函数 $f(x), \forall x \in \mathbb{R}$, 都有 $f(x) = f(x+4) + f(2)$, 若函数 $y = f(x+3)$ 的图象关于直线 $x = -3$ 对称, 且 $\forall x_1, x_2 \in [0, 2],$ 当 $x_1 \neq x_2$ 时, 都有 $(x_2 - x_1)(f(x_2) - f(x_1)) > 0$, 则下列结论正确的是
- A. $f(2) = 0$ B. $f(x)$ 是偶函数
 C. $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数 D. $f(3) < f(-4)$

【高三数学 第2页(共6页)】

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 从集合 $A = \{-2, 1, 3\}$ 中随机选取一个数记为 k ，从集合 $B = \{-1, 2, 3\}$ 中随机选取一个数记为 b ，则直线 $y = kx + b$ 不经过第二象限的概率为 _____。

14. 已知椭圆： $\frac{x^2}{8} - y^2 = 1$ ，过点 $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 的直线与椭圆相交于 A, B 两点，且弦 AB 被点 P 平分，则直线 AB 的方程为 _____。

15. 若曲线 $y = e^x$ 在点 $P(x_1, y_1)$ 处的切线与曲线 $y = x^3$ 在点 $Q(x_2, y_2)$ 处的切线重合，则 $\ln\left(x_1 - \frac{2}{3}x_2\right) =$ _____。

16. 在棱长均相等的四面体 $ABCD$ 中， P 为棱 AD (不含端点) 上的动点，过点 A 的平面 α 与平面 PBC 平行。若平面 α 与平面 ABD ，平面 ACD 的交线分别为 m, n ，则 m, n 所成角的正弦值的最大值为 _____。

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

已知 a, b, c 分别为锐角 $\triangle ABC$ 三个内角 A, B, C 的对边，且 $m = (a, 2b - c), n = (\cos A \cos C)$ ，且 $m \perp n$ 。

(1) 求角 A 的大小；

(2) 求 $\frac{b}{c}$ 的取值范围。



18. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = \frac{2}{3}$, 且满足 $a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n + 1}$.

(1) 求证: 数列 $\left\{\frac{1}{a_n} - 1\right\}$ 为等比数列;

(2) 设数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \begin{cases} \frac{1}{4^n} - 1, n \text{ 为偶数时,} \\ \frac{n+2}{n} + \frac{n}{n+2} - 2, n \text{ 为奇数时,} \end{cases}$ 求最小的实数 m , 使得 $b_1 + b_2 + \dots +$

$b_{2k} > m$ 对一切正整数 k 均成立.

19. (本小题满分 12 分)

长沙某中学发现越来越多的学生就餐时不去食堂, 而是去面包房或校园商店. 考虑到学生的饮食健康及身体营养问题, 校领导要求教育处就学生对食堂的菜品及服务问题等进行满意程度调查. 教育处从三个年级中随机选取了 200 人进行了问卷调查, 并将这 200 人根据其满意度得分分成以下 6 组: $[40, 50), [50, 60), \dots, [90, 100]$, 统计结果如图所示.

(1) 由直方图可认为学生满意度得分 z (单位: 分) 近似地服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 其中 μ 近似为样本平均数 \bar{x} , σ 近似为样本的标准差 s 并已求得 $s = 14.31$. 若该学校有 3000 名学生, 试估计该校学生中满意度得分位于区间 $(56.19, 99.12]$ 内的人数 (每组数据以区间的中点值为代表);

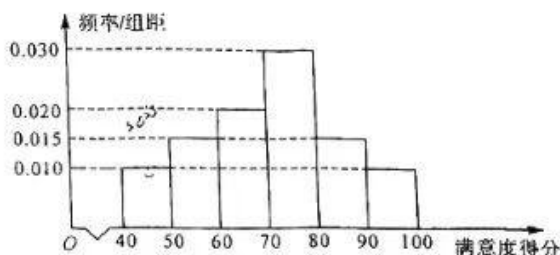
(2) 为吸引学生就餐时间去食堂, 教育处协同后勤处举行为期一周的活动, 每天每位学生可去食堂, 领取一盒早餐奶券 (价值 2 元) 或参加抽奖活动 (只能二选一), 其中抽奖活动规则如下: 每人最多有 4 轮抽奖, 每一轮抽奖相互独立, 中奖率均为 $\frac{1}{2}$, 每一轮抽奖, 若中

奖,可获用餐券一张(价值 2 元,用餐时抵扣);若未中奖,则抽奖活动结束.李同学参与了此次活动.

①若李同学选择抽奖,求他获得 6 元用餐券的概率;

②李同学选择哪种活动更合算?请说明理由.

参考数据:若随机变量 Z 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - \sigma \leq Z \leq \mu + \sigma) \approx 0.6827$, $P(\mu - 2\sigma \leq Z \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$.

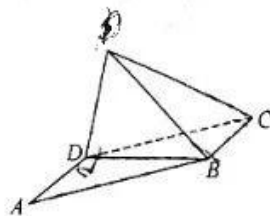


20. (本小题满分 12 分)

如图,四边形 $ABCD$ 为平行四边形, $AB = 5$, $AD = 4$, $BD = 2$, 将 $\triangle ABD$ 沿 BD 翻折到 $\triangle PBD$ 位置且 $\angle PDA = 120^\circ$.

(1)求 P, C 两点之间的距离;

(2)求二面角 $D - PB - C$ 的余弦值.



21. (本小题满分 12 分)

已知点 F 是抛物线 $C: x^2 = 4y$ 与椭圆 $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的公共焦点, 点 M 为椭圆上的动点, 点 M 到点 F 的最大距离为 3.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 过点 M 作抛物线 C 的两条切线, 记切点分别为 A, B , 求 $\triangle MAB$ 面积的最大值.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \frac{a}{x} + \ln x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x_1) = f(x_2) = 2 (x_1 \neq x_2)$, 证明: $a^2 < x_1 x_2 < ae$.



关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京, 旗下拥有网站 (网址: www.zizzs.com) 和微信公众平台等媒体矩阵, 用户群体涵盖

全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线

自主选拔在线
zizzsw



 自主选拔在线
微信号：zizzsw

 自主选拔在线
微信号：zizzsw

 自主选拔在线
微信号：zizzsw