

运城市高二期末考试数学试题答案

1、C 2、A 3、A 4、D 5、B 6、D 7、D 8、C

9、BD 10、ACD 11、BCD 12、ACD

13、3 14、15 15、 $\frac{1}{4}$ 16、 $(-\infty, -\frac{5}{8}] \cup [\frac{5}{16}, +\infty)$

17.解 (1) 由题知, $A = \left\{ x \mid -\frac{1}{2} < x < 2 \right\}$, 当 $a = 2$ 时, $B = \{ x \mid 1 < x < 3 \}$,3 分

则 $A \cup B = \left\{ x \mid -\frac{1}{2} < x < 3 \right\}$4 分

(2) 选①, 由题意可知 $B \subsetneq A$,6 分

则 $\begin{cases} a-1 \geq -\frac{1}{2} \\ a+1 \leq 2 \end{cases}$ 且 “=” 不能同时取到, 解得 $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$,9 分

综上所述, $a \in [\frac{1}{2}, 1]$;10 分

选②, 由题意可知 $B \subseteq A$,6 分

则 $\begin{cases} a-1 \geq -\frac{1}{2} \\ a+1 \leq 2 \end{cases}$, 解得 $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$,9 分

所以, $a \in [\frac{1}{2}, 1]$;10 分

选③, $A \cap B = \emptyset$, 则 $a-1 \geq 2$ 或 $a+1 \leq -\frac{1}{2}$, 解得 $a \geq 3$ 或 $a \leq -\frac{3}{2}$,9 分

所以, $a \in \left\{ a \mid a \geq 3 \text{ 或 } a \leq -\frac{3}{2} \right\}$ 10 分

18.解: (1) 由表可知, 抽取的7件合格产品中有3件优等品, 所以 ξ 的所有可能取值为 0, 1, 2, 3.

$P(\xi = 0) = \frac{C_4^4}{C_7^4} = \frac{1}{35}$, $P(\xi = 1) = \frac{C_3^1 C_4^3}{C_7^4} = \frac{12}{35}$,2 分

$P(\xi = 2) = \frac{C_3^2 C_4^2}{C_7^4} = \frac{18}{35}$, $P(\xi = 3) = \frac{C_3^3 C_4^1}{C_7^4} = \frac{4}{35}$,4 分

$\therefore E(\xi) = 0 \times \frac{1}{35} + 1 \times \frac{12}{35} + 2 \times \frac{18}{35} + 3 \times \frac{4}{35} = \frac{12}{7}$6 分

(2) $\because y = cx^b, \therefore \ln y = \ln c + b \ln x$,7 分

$\therefore \sum_{i=1}^7 (\ln x_i) = 28.0, \sum_{i=1}^7 (\ln y_i) = 21.0$,

$\overline{\ln x} = \frac{1}{7} \sum_{i=1}^7 (\ln x_i) = 4, \overline{\ln y} = \frac{1}{7} \sum_{i=1}^7 (\ln y_i) = 3$,9 分

$$\therefore \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^7 (\ln x_i \ln y_i) - 7 \overline{\ln x} \overline{\ln y}}{\sum_{i=1}^7 (\ln x_i)^2 - 7 (\overline{\ln x})^2} = \frac{84.2 - 7 \times 4 \times 3}{112.5 - 7 \times 16} = 0.4,$$

$$\ln c = \overline{\ln y} - \hat{b} \overline{\ln x} = 3 - 0.4 \times 4 = 1.4, \quad \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\therefore \ln y = 1.4 + 0.4 \ln x, \therefore \hat{y} = e^{1.4+0.4 \ln x}. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. (1) 证明: 令 $x=1, y=0$, 得 $f(1+0)+f(1-0)=3f(1)f(0)$, 所以 $f(0)=\frac{2}{3}$, $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

令 $x=0$, 得 $f(0+y)+f(0-y)=3f(0)f(y)$, 所以 $f(-y)=f(y)$, $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

所以 $f(x)$ 是偶函数。 $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2) 令 $y=1$, 得 $f(x+1)+f(x-1)=3f(x)f(1)=f(x)$, ①

$$f(x+2)+f(x)=f(x+1) \quad \text{②}$$

由①, ②知, $f(x+2)+f(x-1)=0$, $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

所以 $f(x+3)+f(x)=0$, 即 $f(x+3)=-f(x)$,

所以 $f(x+6)=-f(x+3)=f(x)$, 所以 $f(x)$ 的周期是 6. $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

由②式得, $f(2)+f(0)=f(1)$, 所以 $f(2)=-\frac{1}{3}$, $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

同理 $f(3)+f(1)=f(2)$, 所以 $f(3)=-\frac{2}{3}$, $\dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

又由周期性和偶函数可得:

$$f(4)=f(-2)=f(2)=-\frac{1}{3}, \quad f(5)=f(-1)=f(1)=\frac{1}{3}, \quad f(6)=f(0)=\frac{2}{3},$$

所以 $f(1)+f(2)+f(3)+\dots+f(6)=0$ $\dots\dots\dots 11 \text{ 分}$

所以 $\sum_{k=1}^{2025} f(k) = 337 \sum_{k=1}^6 f(k) + f(1) + f(2) + f(3) = -\frac{2}{3}$. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

20. 解: (1) 因为 $f(x) = ax^2 - (a+4)x + 4 = (ax-4)(x-1)$,

当 $a=0$ 时, 不等式 $f(x) < 0$ 的解集为 $\{x|x > 1\}$; $\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

当 $a \neq 0$ 时, $f(x) = (ax-4)(x-1) = 0$ 的两根为 $x_1 = \frac{4}{a}, x_2 = 1$,

当 $a < 0$ 时, 有 $\frac{4}{a} < 1$, 不等式 $f(x) < 0$ 的解集为 $(-\infty, \frac{4}{a}) \cup (1, +\infty)$; $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

当 $a > 0$ 时, 若 $\frac{4}{a} = 1$, 即 $a = 4$ 时, 不等式 $f(x) < 0$ 的解集 ϕ ; $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

若 $\frac{4}{a} < 1$, 即 $a > 4$ 时, 不等式 $f(x) < 0$ 的解集 $(\frac{4}{a}, 1)$; $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

若 $\frac{4}{a} > 1$, 即 $0 < a < 4$ 时, 不等式 $f(x) < 0$ 的解集 $(1, \frac{4}{a})$;5 分

综上, 当 $a = 0$ 时, 不等式 $f(x) < 0$ 的解集为 $\{x | x > 1\}$;

当 $a < 0$ 时, 不等式 $f(x) < 0$ 的解集为 $(-\infty, \frac{4}{a}) \cup (1, +\infty)$;

当 $a = 4$ 时, 不等式 $f(x) < 0$ 的解集 $\emptyset$;

当 $a > 4$ 时, 不等式 $f(x) < 0$ 的解集 $(\frac{4}{a}, 1)$;

当 $0 < a < 4$ 时, 不等式 $f(x) < 0$ 的解集 $(1, \frac{4}{a})$6 分

(2) 由题意, 关于 x 的方程 $ax^2 - 4x + 4 = 0$ 有两个不等的正根,

由韦达定理知 $\begin{cases} \Delta = 16 - 16a > 0 \\ m + n = \frac{4}{a} > 0 \\ mn = \frac{4}{a} > 0 \end{cases}$, 解得 $0 < a < 1$ 8 分

则 $m + n = mn$, 即 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1$,9 分

所以 $4m + n = (4m + n)(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}) = 5 + \frac{4m}{n} + \frac{n}{m} \geq 5 + 2\sqrt{\frac{4m}{n} \cdot \frac{n}{m}} = 9$,10 分

当且仅当 $\begin{cases} \frac{4m}{n} = \frac{n}{m} \\ m + n = mn \end{cases}$, 即 $\begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ n = 3 \end{cases}$ 时, 等号成立, 此时 $a = \frac{8}{9} \in (0, 1)$, 符合条件,

综上, 当且仅当 $a = \frac{8}{9}$ 时, $4m + n$ 取得最小值 9.12 分

21. 解 (1) 甲答对 1 题, 乙答对 2 题, 其概率 $p_1 = C_2^1 \frac{4}{5} \frac{1}{5} C_2^2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{50}$;1 分

甲答对 2 题, 乙答对 1 题, 其概率 $p_2 = C_2^2 \left(\frac{4}{5}\right)^2 C_2^1 \frac{3}{4} \frac{1}{4} = \frac{6}{25}$;2 分

甲答对 2 题, 乙答对 2 题, 其概率 $p_2 = C_2^2 \left(\frac{4}{5}\right)^2 C_2^2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{25}$;3 分

故所求概率 $P = \frac{9}{50} + \frac{6}{25} + \frac{9}{25} = \frac{39}{50}$;4 分

(2) 他们在每轮竞赛中获得“优秀小组”称号的概率为

$$Q = C_2^1 p_1 (1-p_1) C_2^2 p_2^2 + C_2^2 p_1^2 C_2^1 p_2 (1-p_2) + C_2^2 p_1^2 C_2^2 p_2^2 \\ = 2p_1 p_2 (p_1 + p_2) - 3(p_1 p_2)^2 = \frac{5}{2} p_1 p_2 - 3(p_1 p_2)^2,$$

.....5 分

因为 $0 \leq p_1 \leq 1, 0 \leq p_2 \leq 1$, $p_1 + p_2 = \frac{5}{4}$. 所以 $\frac{1}{4} \leq p_1 \leq 1$;

所以 $p_1 p_2 = p_1 (\frac{5}{4} - p_1) = \frac{5}{4} p_1 - p_1^2$, $\frac{1}{4} \leq p_1 \leq 1, \therefore p_1 p_2 \in [\frac{1}{4}, \frac{25}{64}]$7 分

令 $t = p_1 p_2$, $Q = h(t) = \frac{5}{2} t - 3t^2$, $t \in [\frac{1}{4}, \frac{25}{64}]$.

所以当 $t = \frac{5}{12}$ 时, $h(t)_{\max} = h(\frac{5}{12}) = \frac{25}{48}$9 分

设他们小组在 n 轮竞赛中获得“优秀小组”称号的次数为 ξ , 则 $\xi \sim B(n, \frac{25}{48})$10 分

由 $E(\xi) = n \cdot \frac{25}{48} \geq 6$ 得 $n_{\min} = \frac{6}{\frac{25}{48}} \approx 12$. 所以理论上至少要进行 12 轮竞赛.12 分

22. (1) 证明: 因为 $f(x) = e^{x-1} + e^{1-x} + x^2 - 2x + a$,

所以 $f(2-x) = e^{2-x-1} + e^{1-(2-x)} + (2-x)^2 - 2(2-x) + a = e^{1-x} + e^{x-1} + x^2 - 2x + a$,2 分

所以 $f(x) = f(2-x)$, 所以 $f(x)$ 关于 $x=1$ 对称.3 分

(2) (i) 任取 $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$,

$$f(x_1) - f(x_2) = e^{x_1-1} + e^{1-x_1} + x_1^2 - 2x_1 - (e^{x_2-1} + e^{1-x_2} + x_2^2 - 2x_2) \\ = (e^{x_1-1} - e^{x_2-1}) + (e^{1-x_1} - e^{1-x_2}) + (x_1^2 - x_2^2) - 2(x_1 - x_2) \\ = \frac{(e^{x_1-1} - e^{x_2-1})(e^{x_1-1} e^{x_2-1} - 1)}{e^{x_1-1} e^{x_2-1}} + (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 2)$$

.....5 分

$\because 1 < x_1 < x_2 \therefore 0 < x_1 - 1 < x_2 - 1, \therefore e^{x_1-1} > 1, e^{x_2-1} > 1, e^{x_1-1} - e^{x_2-1} < 0, e^{x_1-1} e^{x_2-1} - 1 > 0,$

$x_1 - x_2 < 0, x_1 + x_2 - 2 > 0,$

$\therefore f(x_1) < f(x_2)$,6 分

所以 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 又 $f(x)$ 关于 $x=1$ 对称, 则在在 $(-\infty, 1]$ 上单调递减.

所以 $f(x)_{\min} = f(1) = 1 + a = 3$,

所以 $a = 2$7 分

(单调性也可以用单调性的性质、复合函数的单调性判断、导数证明)

(ii) 不等式 $f(m(e^x + e^{-x}) + 1) > f(e^x - e^{-x})$ 恒成立

等价于 $|(m(e^x + e^{-x}) + 1) - 1| > |e^x - e^{-x} - 1|$ 恒成立,9 分

即 $|m| > \frac{|e^x - e^{-x} - 1|}{e^x + e^{-x}} = \left| \frac{e^x - e^{-x} - 1}{e^x + e^{-x}} \right|$ 恒成立, 即 $|m| > \left(\left| \frac{e^x - e^{-x} - 1}{e^x + e^{-x}} \right| \right)_{\max}$

令 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x} - 1}{e^x + e^{-x}}$, 则 $f(x) = \frac{e^{2x} - e^x - 1}{e^{2x} + 1} = 1 - \frac{e^x + 2}{e^{2x} + 1}$,

令 $e^x + 2 = m, m \in (2, +\infty)$, 则 $e^x = m - 2$,

则 $f(x) = 1 - \frac{m}{m^2 - 4m + 5} = 1 - \frac{1}{m - 4 + \frac{5}{m}}$,

因为 $m \in (2, +\infty), m - 4 + \frac{5}{m} \geq 2\sqrt{5} - 4$, 所以 $f(x) \in [-\frac{\sqrt{5}}{2}, 1)$,

所以 $|f(x)| \in \left[0, \frac{\sqrt{5}}{2}\right]$,11 分

所以 $|m| > \frac{\sqrt{5}}{2}$, 即 $m \in (-\infty, -\frac{\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{\sqrt{5}}{2}, +\infty)$12 分