

合肥市 2023 年高三第二次教学质量检测

数学试题

(考试时间: 120 分钟 满分: 150 分)

注意事项:

1. 答题前, 务必在答题卡和答题卷规定的地方填写自己的姓名、准考证号和座位号后两位。
2. 答第 I 卷时, 每小题选出答案后, 用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。
3. 答第 II 卷时, 必须使用 0.5 毫米的黑色墨水签字笔在答题卷上书写, 要求字体工整、笔迹清晰。作图题可先用铅笔在答题卷规定的位置绘出, 确认后再用 0.5 毫米的黑色墨水签字笔描清楚。必须在题号所指示的答题区域作答, 超出答题区域书写的答案无效, 在试题卷、草稿纸上答题无效。
4. 考试结束, 务必将答题卡和答题卷一并上交。

一、选择题: 本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 满分 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 设 i 是虚数单位, 复数 $z = \frac{2i}{1-i}$, 则在复平面内 z 所对应的点在()。
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
2. 若集合 $M = \{x | x^2 + 3x - 4 \leq 0\}$, $N = \{x | x > -3\}$, 则 $M \cup N =$ ()。
A. $(-3, 1]$ B. $(-3, 4]$ C. $[-4, +\infty)$ D. $[-1, +\infty)$
3. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = -1$, $a_1 + a_5 = 2$, 则 S_8 的值为()。
A. -27 B. -16 C. -11 D. -9
4. Malthus 模型是一种重要的数学模型。某研究人员在研究一种细菌繁殖数量 $N(t)$ 与时间 t 关系时, 得到的 Malthus 模型是 $N(t) = N_0 e^{0.46t}$, 其中 N_0 是 $t = t_0$ 时刻的细菌数量, e 为自然对数的底数。若 t 时刻细菌数量是 t_0 时刻细菌数量的 6.3 倍, 则 t 约为()。($\ln 6.3 \approx 1.84$)
A. 2 B. 3 C. 4 D. 5
5. 已知球与圆台的上下底面和侧面都相切。若圆台的侧面积为 16π , 上、下底面的面积之比为 $1:9$, 则球的表面积为()。
A. 12π B. 14π C. 16π D. 18π
6. 某高中学校在新学期增设了“传统文化”、“数学文化”、“综合实践”、“科学技术”和“劳动技术”5 门校本课程。小明和小华两位同学商量每人选报 2 门校本课程。若两人所选的课程至多有一门相同, 且小明必须选报“数学文化”课程, 则两位同学不同的选课方案有()。
A. 24 种 B. 36 种 C. 48 种 D. 52 种
7. 在平面直角坐标系 xOy 中, 对于点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 若 $x_2 - x_1 = y_2 - y_1$, 则称点 A 和点 B 互为等差点。已知点 Q 是圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上一点, 若直线 $x = 2\sqrt{2}$ 上存在点 Q 的等差点 P , 则 $|OP|$ 的取值范围为()。
A. $[2\sqrt{2}, 4\sqrt{2}]$ B. $[\sqrt{10}, 2\sqrt{10}]$ C. $[2\sqrt{2}, 2\sqrt{10}]$ D. $[2\sqrt{2}, 8]$

8. 设 A, B, C, D 是曲线 $y = x^3 - mx$ 上的四个动点, 若以这四个动点为顶点的正方形有且只有一个, 则实数 m 的值为().

- A. 4 B. $2\sqrt{3}$ C. 3 D. $2\sqrt{2}$

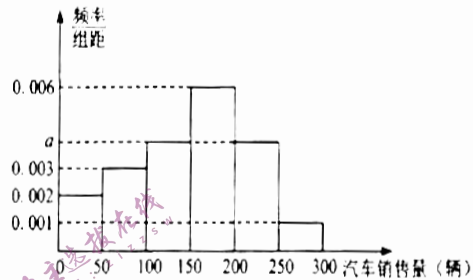
二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知双曲线 $C: x^2 - y^2 = 2$ 的左、右顶点分别为 A_1, A_2 , 渐近线为直线 l_1, l_2 , 离心率为 e . 过右焦点 F 且垂直于 x 轴的直线交双曲线 C 于点 P, Q , 则().

- A. $e = \sqrt{2}$ B. $l_1 \perp l_2$ C. $|PQ| = 2$ D. $A_1P \perp A_2Q$

10. 下图是某汽车公司 100 家销售商 2022 年新能源汽车销售数据频率分布直方图(单位: 辆), 则().

- A. a 的值为 0.004
 B. 估计这 100 家销售商新能源汽车销量的平均数为 135
 C. 估计这 100 家销售商新能源汽车销量的 80% 分位数为 212.5
 D. 若按分层抽样原则从这 100 家销售商抽取 20 家, 则销量在 $[200, 300]$ 内的销售商应抽取 5 家



11. 函数 $f(x) = \sin 2x$ 与函数 $g(x)$ 的图像关于点 $(-\frac{\pi}{12}, 0)$ 对称, 记 $F(x) = f(x) + g(x)$, 则().

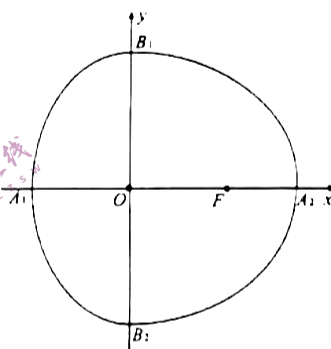
- A. $F(x)$ 的值域为 $[-2, 2]$
 B. $F(x)$ 的图像关于直线 $x = -\frac{7\pi}{3}$ 对称
 C. $F(x) = 1$ 在 $(-\frac{\pi}{12}, \frac{17\pi}{12})$ 所有实根之和为 $\frac{8\pi}{3}$
 D. $F(x) < -\frac{3}{2}$ 在 $(-\pi, 0)$ 上解集为 $(-\frac{5\pi}{12}, -\frac{\pi}{6})$

12. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, 点 E, F 分别是棱 AD, AB 上的动点, G 是棱 AA_1 的中点, 以 $\triangle EFG$ 为底面作三棱柱 $EFG - E_1F_1G_1$, 顶点 E_1, F_1, G_1 也在正方体的表面上. 设 $\overrightarrow{FE} = t\overrightarrow{AD} + (t-1)\overrightarrow{AB}$, $t \in [0, 1]$, 则().

- A. $\forall t \in [0, 1]$, 直线 B_1E 与直线 D_1F 所成的角均为 90°
 B. $\exists t \in [0, 1]$, 使得四面体 A_1EFC_1 的体积为 $\frac{1}{5}$
 C. 当 $t = \frac{2}{3}$ 时, 直线 C_1F 与平面 CDD_1C_1 所成角的正切值为 $\frac{3\sqrt{13}}{13}$
 D. 当 $t = \frac{1}{2}$ 时, 若三棱柱 $EFG - E_1F_1G_1$ 为正三棱柱, 则其高为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

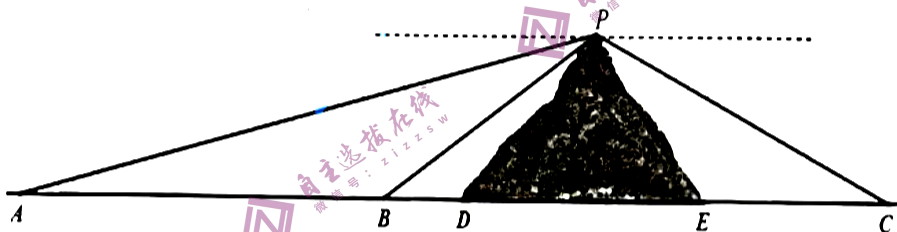
13. 已知 $a=(1, 0)$, $b=(1, -1)$, $c=\lambda a-b$. 若 $c \parallel b$, 则实数 λ 的值为_____.
14. 若定义域为 R 的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=f(x+1)+f(x-1)$, 且 $f(1)=2$, 则 $f(2024)=$ _____.
15. 第十九届亚洲运动会将于 2023 年 9 月 23 日至 10 月 8 日在中国杭州举行. 为了让更多的同学了解亚运会, 学校团委举行了“迎亚运, 猜谜语”活动. 甲、乙两位同学组队代表班级参加此次谜语竞猜活动. 比赛共两轮, 每人每轮各猜一个谜语. 已知甲每轮猜对谜语的的概率为 $\frac{2}{3}$, 乙每轮猜对谜语的的概率为 $\frac{1}{2}$. 若甲、乙两人每轮猜对谜语与否互不影响, 前后两轮猜对谜语结果也互不影响, 则甲、乙两人在此次比赛中共猜对 3 个谜语的的概率为_____.
16. 我们把由半椭圆 $E_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (x \geq 0)$ 与半椭圆 $E_2: \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{c^2} = 1 (x \leq 0)$ 合成的曲线称为“果圆”, 其中 $a^2 = b^2 + c^2$, $a > b > c > 0$, 如图. 设 A_1, A_2, B_1, B_2 , 是“果圆”与坐标轴的交点, C 为半椭圆 E_1 上一点, F 为半椭圆 E_1 的焦点. 若 $|CA_1| + |CF| = 4\sqrt{3}$, $\tan \angle B_1 A_1 B_2 = -2\sqrt{2}$, 则“果圆”的内接矩形面积的最大值为_____.



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

如图, 某地需要经过一座山两侧的 D, E 两点修建一条穿山隧道. 工程人员先选取直线 DE 上的三点 A, B, C , 设在隧道 DE 正上方的山顶 P 处测得 A 处的俯角为 15° , B 处的俯角为 45° , C 处的俯角为 30° , 且测得 $AB=1.4\text{km}$, $BD=0.2\text{km}$, $CE=0.5\text{km}$, 试求拟修建的隧道 DE 的长.



18. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1=1$, $a_{n+1}=S_n+1$.

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 令 $b_n = na_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .