

银川一中 2023 届高三第四次月考数学(理科) (参考答案)

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	E	C	E	A	C	A	E	C	D	C	B

二、填空题

13. 1 14. $\frac{\pi}{3}$ 15. $[2, \frac{7}{3})$ 16. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

三、解答题

17. 解: 因为 $S_{n+1} = S_n + a_n + 1$,

18. 所以 $S_{n+1} - S_n = a_n + 1$, 即 $a_{n+1} = a_n + 1$,

19. 所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 a_1 , 公差为 1 的等差数列. 2 分

20. (1) 选①:

21. 由 $a_4 + a_7 = 13$, 得 $a_1 + 3d + a_1 + 6d = 13$,

22. 即 $2a_1 = 13 - 9d$,

23. 所以 $2a_1 = 13 - 9 \times 1 = 4$, 解得 $a_1 = 2$ 4 分

24. 所以 $a_n = a_1 + (n-1)d = 2 + (n-1) \times 1 = n + 1$,

25. 即数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = n + 1$ 6 分

选②:

由 a_1, a_3, a_7 成等比数列,

得 $(a_1 + 2d)^2 = a_1(a_1 + 6d)$,

则 $a_1^2 + 4a_1d + 4d^2 = a_1^2 + 6a_1d$,

所以 $a_1 = 2$, 4 分

所以 $a_n = a_1 + (n-1)d = 2 + (n-1) \times 1 = n + 1$ 6 分

选③:

因为 $S_{10} = 10a_1 + \frac{10 \times 9}{2} \times d = 10a_1 + 45d$,

所以 $10a_1 + 45 \times 1 = 65$,

所以 $a_1 = 2$, 4 分

所以 $a_n = a_1 + (n-1)d = 2 + (n-1) \times 1 = n + 1$ 6 分

(2) 由题可知 $b_n = a_n - 1 = n$, 则 $2^n \cdot b_n = 2^n \cdot n$, 8 分

(3) 则 $T_n = 1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + n \cdot 2^n$, ①

(4) $2T_n = 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 + \dots + n \cdot 2^{n+1}$, ②

(5) 由①-②得: $-T_n = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^n - n \cdot 2^{n+1}$ 10 分

$$= \frac{2(1-2^n)}{1-2} - n \cdot 2^{n+1}$$

所以 $T_n = 2 + (n-1)2^{n+1}$, 12 分

18. 解: (1) $\because AB$ 是半圆 D 的直径,

$\therefore BE \perp AE$, 2 分

$\because \angle BAC = 90^\circ$, 即 $AB \perp AC$,

又平面 $ABE \cap$ 平面 $ABC = AB$, 且平面 $ABE \perp$ 平面 ABC , $AC \subset$ 平面 ABC ,

$\therefore AC \perp$ 平面 ABE , 又 $BE \subset$ 平面 ABE ,

$\therefore BE \perp AC$ 4 分

所以 $PQ \perp$ 平面 $ABCD$,

以点 Q 为原点, 以 $\overrightarrow{QA}$, $\overrightarrow{QB}$, $\overrightarrow{QP}$ 分别为 x , y , z 轴的正方向

建立空间直角坐标系, (6 分)

则 $Q(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(0,\sqrt{3},0)$, $C(-2,\sqrt{3},0)$, $D(-1,0,0)$, $P(0,0,\sqrt{3})$,

由 $\overrightarrow{PM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PC}$, 可得 $M\left(-\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$,

所以 $\overrightarrow{QM} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$, $\overrightarrow{QB} = (0, \sqrt{3}, 0)$.

$$\text{设平面 } MOB \text{ 的法向量 } \vec{m} = (x, y, z), \begin{cases} \overrightarrow{QM} \cdot \vec{m} = -\frac{2}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}y + \frac{2\sqrt{3}}{3}z = 0 \\ \overrightarrow{QB} \cdot \vec{m} = \sqrt{3}y = 0 \end{cases} \quad (8$$

分)

$$\text{可取 } x = \sqrt{3}, y = 0, z = 1, \text{ 则 } \vec{m} = (\sqrt{3}, 0, 1), \quad (9$$

分)

$$\text{直线 } PD \text{ 的方向向量 } \overrightarrow{PD} = (-1, 0, -\sqrt{3}), \quad (10$$

分)

设直线 PD 和平面 MQB 所成角为 θ , 则

$$\sin \theta = \left| \cos \langle \overrightarrow{PD}, \vec{m} \rangle \right| = \frac{|\overrightarrow{PD} \cdot \vec{m}|}{|\overrightarrow{PD}| \times |\vec{m}|} = \frac{|-\sqrt{3} - \sqrt{3}|}{2 \times 2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

即直线 PD 和平面 MQB 所成角的大小为 60° .

(12 分)

21. 解: (1) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $a = 0$, $f(x) = xe^x$, $f'(x) = (x+1)e^x > 0$,

$f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 m 的取值范围是 $\emptyset$. (4

分)

(2) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$f'(x) = xe^x - a(\ln x + x) = xe^x - a \ln(xe^x) = 0$ 有两个不相等的实数根,

令 $t = xe^x$, 由 (1) 知 $y = xe^x$ 在 $(0, +\infty)$ 上递增, 则 $t > 0$,

则 $p(t) = t - a \ln t$ 有两个不相等的零点 t_1, t_2 , $t_1 = x_1 e^{x_1}$, $t_2 = x_2 e^{x_2}$, (6 分)

$$\begin{cases} t_1 - a \ln t_1 = 0 \\ t_2 - a \ln t_2 = 0 \end{cases}, \quad a(\ln t_2 - \ln t_1) = t_2 - t_1, \quad a(\ln t_2 + \ln t_1) = t_2 + t_1.$$

要证 $e^{x_1 - x_2} > \frac{e^2}{x_1 x_2}$, 只需证 $(x_1 e^{x_1}) \cdot (x_2 e^{x_2}) > e^2$, 即证 $\ln(x_1 e^{x_1}) + \ln(x_2 e^{x_2}) > 2$,

即证 $\ln t_1 + \ln t_2 > 2$, (8 分)

$$\ln t_1 + \ln t_2 = \frac{t_2 + t_1}{t_2 - t_1} (\ln t_2 - \ln t_1) = \frac{\left(\frac{t_2}{t_1} + 1\right) \ln \frac{t_2}{t_1}}{\frac{t_2}{t_1} - 1},$$

故只需证 $\frac{\left(\frac{t_2}{t_1}+1\right)\ln \frac{t_2}{t_1}}{\frac{t_2}{t_1}-1} > 2$,

不妨设 $0 < t_1 < t_2$, 令 $\mu = \frac{t_2}{t_1} > 1$,

则只需证 $\ln \mu > 2 \cdot \frac{\mu-1}{\mu+1}$,

只需证 $\ln \mu + \frac{4}{\mu+1} - 2 > 0$,

令 $s(\mu) = \ln \mu + \frac{4}{\mu+1} - 2 (\mu > 1)$,

$s'(\mu) = \frac{1}{\mu} - \frac{4}{(\mu+1)^2} = \frac{(\mu-1)^2}{\mu(\mu+1)^2} > 0$,

所以 $s(\mu) > s(1) = 0$,

即当 $\mu > 1$ 时, $\ln \mu + \frac{4}{\mu+1} - 2 > 0$ 成立.

所以 $\ln t_1 + \ln t_2 > 2$, 即 $(x_1 e^{x_1}) \cdot (x_2 e^{x_2}) > e^2$, 所以 $e^{x_1+x_2} > \frac{e^2}{x_1 x_2}$. (12 分)

22. 【答案】(1) $x - y + 1 = 0$, $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$; (2) $\frac{8\sqrt{2}}{5}$.

(1) 由 $\begin{cases} x = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数),

可得 l 的普通方程为 $x - y + 1 = 0$;2 分

由曲线 C 的极坐标方程 $\rho^2 + 3\rho^2 \sin^2 \theta = 4$ 及 $\begin{cases} \rho^2 = x^2 + y^2, \\ \rho \sin \theta = y, \end{cases}$

可得 $x^2 + y^2 + 3y^2 = 4$,

整理得 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$,5 分

所以曲线 C 的直角坐标方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) 易知点 M 在直线 l 上,

将 l 的参数方程代入 C 的直角坐标方程, 得 $\left(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2 + 4 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2 = 4$,

即 $5t^2 - 2\sqrt{2}t - 6 = 0$,7 分

设 P, Q 对应的参数分别为 t_1, t_2 , 则 $t_1 + t_2 = \frac{2\sqrt{2}}{5}$, $t_1 t_2 = -\frac{6}{5}$,9 分

因为 $t_1 t_2 < 0$,

$$\text{所以 } |MP| + |MQ| = |t_1 - t_2| = \sqrt{(t_1 + t_2)^2 - 4t_1t_2} = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{2}}{5}\right)^2 - 4\left(-\frac{6}{5}\right)} = \frac{8\sqrt{2}}{5}. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

23.解: (1)因为 $b = c$ 且 a, b, c 均为正数, 所以 $2a + 2b = 1$1 分

$$\text{则 } \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)(2a + 2b) = 4 + \frac{2b}{a} + \frac{2a}{b} \geq 4 + 2\sqrt{\frac{2b}{a} \times \frac{2a}{b}} = 8, \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

则当且仅当 $a = b = \frac{1}{4}$ 时等号成立,5 分

$$\text{故 } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 8,$$

(2)因为 $2a + b + c = 1$, 由柯西不等式得

$$(4a^2 + b^2 + 9c^2)\left(1 + 1 + \frac{1}{9}\right) \geq (2a + b + c)^2 = 1 \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

故当且仅当 $2a = b = 9c$ 且 $2a + b + c = 1$ 时等号成立

$$\text{即当且仅当 } a = \frac{9}{38}, b = \frac{9}{19}, c = \frac{1}{19} \text{ 时成立则 } 4a^2 + b^2 + 9c^2 \geq \frac{9}{19}. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线