江苏省G4联盟（苏州中学、扬州中学、盐城中学、常州中学）
2022-2023学年高三上学期12月联考数学试题

一、单选题

1．设集合$A=\{-1,0\}$，$B=\{x|-2<x<0\}$，则$A\cap B=$（　　）

A．$\{-1\}$　　B．$\{-1,0\}$　　C．$\{x|-2<x<0\}$　　D．$B=\{x|-2<x\le 0\}$

2．若复数z的共轭复数$\bar{z}$满足$i\cdot\bar{z}=4+3i$（其中i为虚数单位），则$z\cdot\bar{z}$的值为（　　）

A．$\sqrt{7}$　　B．5　　C．7　　D．25

3．如图是近十年来全国城镇人口、乡村人口的折线图（数据来自国家统计局）．

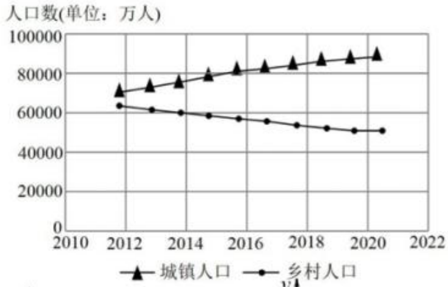
根据该折线图，下列说法错误的是（　　）

A．城镇人口与年份呈现正相关

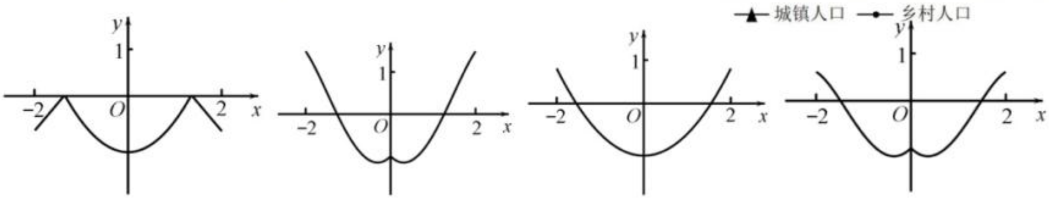
B．乡村人口与年份的相关系数r接近1

C．城镇人口逐年增长率大致相同

D．可预测乡村人口仍呈现下降趋势



4．函数$y=2x^2-e^{|x|}$在$[-2,2]$的图象大致为（　　）



A．　　B．　　C．　　D．

5．椭圆焦点为F_1，F_2，过F_1的最短弦PQ长为10，ΔPF_2Q的周长为36，则此椭圆的离心率为（　　）

A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C．$\frac{2}{3}$　　D．$\frac{\sqrt{6}}{3}$

6．南宋时期，秦九韶就创立了精密测算雨量、雨雪的方法，他在《数学九章》载有“天池盆测雨”题，使用一个圆台形的天池盆接雨水．观察发现体积一半时的水深大于盆高的一半，体积一半时的水面面积大于盆高一半时的水面面积，若盆口半径为a，盆地半径为$b\left(0<b<a\right)$，根据如上事实，可以抽象出的不等关系为（　　）

A．$\sqrt[3]{\frac{a+b}{2}}<\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}{2}$　　B．$\sqrt{\frac{a+b}{2}}<\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$　　C．$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2<\frac{a^2+b^2}{2}$　　D．$\left(\frac{a+b}{2}\right)^3<\frac{a^3+b^3}{2}$

7．在数列$\{a_n\}$中，$\sin\left(a_{n+1}-a_n\right)\cdot\sin\left(a_{n+1}+a_n\right)=\frac{1}{10}$，则该数列项数的最大值为（　　）

A．9　　B．10　　C．11　　D．12

8．在ΔABC中，$AB=4$，$BC=3$，$CA=2$，点P在该三角形的内切圆上运动，若$\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$（$m$，$n$为实数），则$m+n$的最小值为（　　）

A．$\frac{5}{18}$　　B．$\frac{1}{3}$　　C．$\frac{7}{18}$　　D．$\frac{4}{9}$

二、多选题

9．已知$a>0$，$b>0$，$a+b=1$，则（　　）

A．$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\le 4$　　B．$2^a+2^b\ge 2\sqrt{2}$　　C．$\log_2 a+\log_2 b\le -2$　　D．$\sin a+\sin b\le 2\sin\frac{1}{2}$

10．已知函数$f(x)=e^{x-a}+e^{a-x}$，$g(x)=e^{x-a}-e^{a-x}$，则（　　）

A．函数$y=g(x)$有且仅有一个零点　　B．$f'(x)=g(x)$且$g'(x)=f(x)$

C．函数$y=f(x)g(x)$的图象是轴对称图形　　D．函数$y=\frac{g(x)}{f(x)}$在R上单调递增

11．乒乓球（tabletennis），被称为中国的“国球”，是一种世界流行的球类体育项目，是推动外交的体育项目，被誉为“小球推动大球”．某次比赛采用五局三胜制，当参赛甲、乙两位中有一位赢得三局比赛时，就由该选手晋级而比赛结束．每局比赛皆须分出胜负，且每局比赛的胜负不受之前已赛结果影响．假设甲在任一局赢球的概率为$p(0\le p\le 1)$，实际比赛局数的期望值记为$f(p)$，下列说法正确的是（　　）

A．三局就结束比赛的概率为$p^3+(1-p)^3$　　B．$f(p)$的常数项为3

C．$f\left(\frac{1}{3}\right)<f\left(\frac{4}{5}\right)$　　D．$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{33}{8}$

12．在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为正方形，$PA\perp$底面$ABCD$，$PA=AB=1$，G为PC的中点，M为平面PBD上一点，下列说法正确的是（　　）

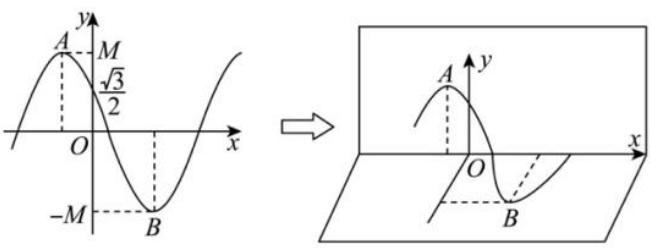
A．MG的最小值为$\frac{\sqrt{3}}{6}$　　B．若$MA+MG=1$，则点M的轨迹是椭圆

C．若$MA=\frac{\sqrt{15}}{6}$，则点M的轨迹围成图形的面积为$\frac{\pi}{12}$　　D．存在点M，使得直线BM与CD所成角为30°

三、填空题

13．$\left(x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$的展开式中常数项是__________．

14．如图，将绘有函数$f(x)=M\sin\left(\frac{\pi}{2}x+\varphi\right)(M>0,0<\varphi<\pi)$部分图象的纸片沿$x$轴折成直二面角，此时$A,B$之间的距离为$\sqrt{10}$，则$\varphi=$__________．



15．我们利用“错位相减”的方法可求等比数列的前n项和，进而可利用该法求数列$\{(2n-1)\cdot 3^n\}$的前n项和S_n，其操作步骤如下：

由于$S_n=1\times 3^1+3\times 3^2+\cdots+(2n-1)\cdot 3^n$，

$3S_n=1\times 3^2+3\times 3^3+\cdots+(2n-1)\cdot 3^{n+1}$，

从而$2S_n=-3-(2\times 3^2+\cdots+2\times 3^n)+(2n-1)\cdot 3^{n+1}$，

所以$S_n=(n-1)\cdot 3^{n+1}+3$，

类比如上方法可求数列$\{n^2\cdot 3^n\}$的前n项和T_n，则$2T_n+3=$__________．

16．已知函数$f(x)$是定义在R上的偶函数，且当$x\geq 0$时，$f(x)=2^x$．若对任意$x\in[1,3]$，不等式$f(x+a)\leq f^2(x)$恒成立，则实数a的取值范围是__________．

四、解答题

17．在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，其前n项和S_n满足$2S_n=(n+1)a_n, n\in\mathbf{N}^*$.

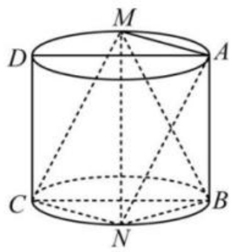
(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式a_n；

(2)若m为正整数，记集合$\left\{a_n \mid \frac{a_n}{2}+\frac{2}{a_n}\leq m\right\}$的元素个数为$b_m$，求数列$\{b_m\}$的前20项和．

18．在轴截面为正方形$ABCD$的圆柱中，M,N分别为弧AD，弧BC的中点，且在平面$ABCD$的两侧．

(1)求证：四边形$ANCM$是矩形；

(2)求二面角$B-MN-C$的余弦值．



19．文化月活动中，某班级在宣传栏贴出标语“学好数学好”，可以不同断句产生不同意思，“学/好数学/好”指要学好的数学，“学好/数学/好”强调数学学习的重要性，假设一段时间后，随机有N个字脱落．

(1)若$N=3$，用随机变量X表示脱落的字中“学”的个数，求随机变量X的分布列及期望；

(2)若$N=2$，假设某同学检起后随机贴回，求标语恢复原样的概率．

20．记ΔABC的内角A、B、C的对边分别为a、b、c，已知$b=1$，$c=2$．

(1)若$\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}=2$，求A；　(2)若$C-B=\dfrac{2\pi}{3}$，求$\Delta ABC$的面积．

21．在平面直角坐标系xOy中，已知点P在抛物线$C_1:y^2=4x$上，圆$C_2:(x-2)^2+y^2=r^2(0<r<2)$.

(1)若$r=1$，Q为圆C_2上的动点，求线段PQ长度的最小值；

(2)若点P的纵坐标为4，过P的直线m,n与圆C_2相切，分别交抛物线C_1于A,B（异于点P），求证：直线AB过定点．

22．若对实数x_0，函数$f(x)$，$g(x)$满足$f(x_0)=g(x_0)$且$f'(x_0)=g'(x_0)$，则称$F(x)=\begin{cases}f(x),x<x_0\\g(x),x\geq x_0\end{cases}$为“平滑函数”，$x_0$为该函数的“平滑点”．已知$f(x)=ax^3-\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{1}{2}x$，$g(x)=bx\ln x$．

(1)若1是平滑函数$F(x)$的“平滑点”，

（i）求实数a，b的值；

（ii）若过点$P(2,t)$可作三条不同的直线与函数$y=F(x)$的图象相切，求实数t的取值范围；

(2)对任意$b>0$，判断是否存在$a\geq1$，使得函数$F(x)$存在正的“平滑点”，并说明理由．

江苏省 G4 联盟（苏州中学、扬州中学、盐城中学、常州中学）
2022-2023 学年高三上学期 12 月联考数学试题参考答案

1．A【详解】由 $A=\{-1,0\}$，$B=\{x|-2<x<0\}$，所以 $A\cap B=\{-1\}$.

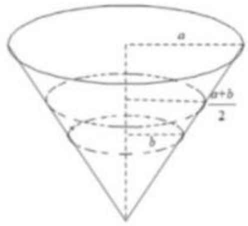
2．D【详解】解：由题意 $i\cdot\bar{z}=4+3i$，则 $\bar{z}=3-4i$，所以，$z=3+4i$，$\therefore z\cdot\bar{z}=(3+4i)\cdot(3-4i)=25$

3．B【详解】对于 A 选项，由折线图可知，城镇人口与年份呈现正相关，A 对；
对于 B 选项，因为乡村人口与年份呈负线性相关关系，且线性相关性很强，所以 r 接近 -1，B 错；
对于 C 选项，城镇人口与年份呈现正相关，且线性相关性很强，相关系数 r 接近 1，
故城镇人口逐年增长率大致相同，C 对；
对于 D 选项，由折线图可知，乡村人口与年份呈负线性相关关系，可预测乡村人口仍呈现下降趋势，D 对.

4．D【详解】试题分析：函数 $f(x)=2x^2-e^{|x|}$ 在[−2,2]上是偶函数，其图象关于 y 轴对称，因为 $f(2)=8-e^2, 0<8-e^2<1$，所以排除 A,B 选项；当 $x\in[0,2]$ 时，$y'=4x-e^x$ 有一零点，设为 x_0，当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f(x)$ 为减函数，当 $x\in(x_0,2)$ 时，$f(x)$ 为增函数.

5．C【详解】设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 其焦点坐标为 F_1(-c,0)，由已知 P、Q 坐标为 M(-c, $\frac{b^2}{a}$),N(-c,-$\frac{b^2}{a}$)
所以，$2\cdot\frac{b^2}{a}$=10，$b^2=5a$；△PF_2Q 的周长为 36　|PF_2|=|F_2Q|=$\frac{36-|PQ|}{2}$=13,c=6
$a^2=b^2+c^2=5a+36$，所以(a-9)(a+4)=0 因为 a>0,所以，a=9，椭圆的离心率为 $\frac{2}{3}$，故选 C.

6．D【详解】经圆台形的天池盆补形为圆锥，则以 a 为底面半径的圆锥体积与以 b 为底面半径的圆锥体积之比为 $a^3:b^3$，如图所示，设以 a 为底面半径的圆锥体积为 a^3，则以 b 为底面半径的圆锥体积为 b^3，
以 $\frac{a+b}{2}$ 为底面半径的圆锥体积为 $\left(\frac{a+b}{2}\right)^3$，



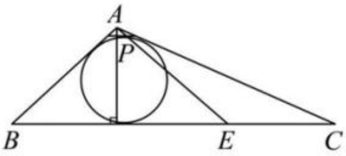
则由题意 $a^3+b^3>2\cdot\left(\frac{a+b}{2}\right)^3$，即 $\left(\frac{a+b}{2}\right)^3<\frac{a^3+b^3}{2}$.

7．C【详解】$\sin(a_{n+1}-a_n)\cdot\sin(a_{n+1}+a_n)$
$=\frac{\cos[(a_{n+1}-a_n)-(a_{n+1}+a_n)]-\cos[(a_{n+1}-a_n)+(a_{n+1}+a_n)]}{2}=\sin^2 a_{n+1}-\sin^2 a_n=\frac{1}{10}$，
所以 $\{\sin^2 a_n\}$ 为等差数列，公差为 $\frac{1}{10}$，所以 $\sin^2 a_n=\sin^2 a_1+(n-1)\times\frac{1}{10}\leqslant 1$，
所以 $\frac{n-1}{10}\leqslant 1-\sin^2 a_1\leqslant 1\Rightarrow n\leqslant 11$

8．B【详解】$\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}=(m+n)\left(\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}+\frac{n}{m+n}\overrightarrow{AC}\right)$，由 P 在内切圆上，
故 $m+n=\frac{|\overrightarrow{AP}|}{\left|\left(\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}+\frac{n}{m+n}\overrightarrow{AC}\right)\right|}$，假设 $\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}+\frac{n}{m+n}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AE}$，由于 $\frac{m}{m+n}+\frac{n}{m+n}=1$，$\overrightarrow{AP}=(m+n)\overrightarrow{AE}$，

则$m+n=\dfrac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{AE}|}$，且$E$为$BC$上一点，A，$P$，$E$三点共线，

由平行线等比关系可得，要使$m+n$，即$|\overrightarrow{AP}|$与$|\overrightarrow{AE}|$之间的比例最小，则P在内切圆的最高点，如图，



由$\cos A=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\dfrac{11}{16}$，

因为$\sin A>0$，所以$\sin A=\dfrac{3\sqrt{15}}{16}$，

设BC边上高为h，内切圆半径为r，

由$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A=\dfrac{1}{2}BC\cdot h=\dfrac{1}{2}r(AB+AC+BC)$，

所以$h=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$，$r=\dfrac{\sqrt{15}}{6}$，可得$m+n$的最小值为$\dfrac{h-2r}{h}=\dfrac{1}{3}$

9．BCD【详解】$\because a>0$，$b>0$，$a+b=1$，

$\therefore\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{a+b}{a}+\dfrac{a+b}{b}=\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}+2\geq 2\sqrt{\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{a}{b}}+2=4$，当且仅当$\dfrac{b}{a}=\dfrac{a}{b}$，即$a=b=\dfrac{1}{2}$时取等号，故**A**不正确；

又$2^a+2^b\geq 2\sqrt{2^a\cdot 2^b}=2\sqrt{2^{a+b}}=2\sqrt{2}$，当且仅当$2^a=2^b$，即$a=b=\dfrac{1}{2}$时取等号，故**B**正确；

$\because\log_2 a+\log_2 b=\log_2(ab)\leq\log_2\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2=\log_2\dfrac{1}{4}=-2$，当且仅当$a=b=\dfrac{1}{2}$时取等号，故**C**正确；

又$\sin a+\sin b=2\sin\dfrac{a+b}{2}\cdot\cos\dfrac{a-b}{2}$，$\because -1\leq\cos\dfrac{a-b}{2}\leq 1$，$\therefore\sin a+\sin b\leq 2\sin\dfrac{1}{2}$，故**D**正确

10．ABD【详解】对于**A**，令$g(x)=0$可得$e^{x-a}-e^{a-x}=0$，解得$x=a$，**A**正确；

对于**B**，由$f(x)=e^{x-a}+e^{a-x}$，$g(x)=e^{x-a}-e^{a-x}$可得$f'(x)=e^{x-a}-e^{a-x}$，$g'(x)=e^{x-a}+e^{a-x}$，**B**正确；

对于**C**，设$F(x)=f(x)g(x)=e^{2x-2a}-e^{2a-2x}$，则$F(x+a)=e^{2x}-e^{-2x}$，所以$F(-x+a)=e^{-2x}-e^{2x}$，因为$F(x+a)=-F(-x+a)$，所以函数$F(x+a)$为奇函数，所以$F(x+a)$的图象关于原点对称，所以$F(x)$的图象关于点$(a,0)$对称，即函数$f(x)g(x)$的图象关于点$(a,0)$对称；故**C**错误；

对于**D**，函数$y=\dfrac{g(x)}{f(x)}$的定义域为R，又$\left[\dfrac{g(x)}{f(x)}\right]'=\left(\dfrac{e^{x-a}-e^{a-x}}{e^{x-a}+e^{a-x}}\right)'=\dfrac{4e^{x-a}e^{a-x}}{\left(e^{x-a}+e^{a-x}\right)^2}>0$，所以函数$y=\dfrac{g(x)}{f(x)}$在**R**上单调递增，**D**正确

11．ABD【详解】设实际比赛局数为x，则$P(x=3)=p^3+(1-p)^3$，$P(x=4)=C_3^1p^3(1-p)+C_3^1p(1-p)^3$，$P(x=5)=C_4^2p^2(1-p)^2$，因此三局就结束比赛的概率为$p^3+(1-p)^3$，则**A**正确；

则$f(p)=3\left[p^3+(1-p)^3\right]+4\left[C_3^1p^3(1-p)+C_3^1p(1-p)^3\right]+5\times C_4^2p^2(1-p)^2=6p^4-12p^3+3p^2+3p+3$，

由$f(0)=3$，则常数项为3，则B正确；由$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{33}{8}$，则D正确；

由$f'(p)=24p^3-36p^2+6p+3=3(2p-1)(4p^2-4p-1)$，

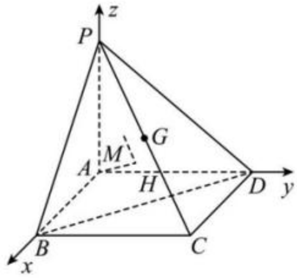
$\because 0\le p\le 1$，所以$4p^2-4p-1<0$，$\therefore$令$f'(p)>0$，则$0\le p<\frac{1}{2}$；令$f'(p)<0$，则$\frac{1}{2}<p\le 1$，

则函数$f(p)$在$\left(0,\frac{1}{2}\right)$上单调递增，在$\left(\frac{1}{2},1\right)$上单调递减，

因为$f(1-p)=3\left[(1-p)^3+p^3\right]+4\left[C_3^1(1-p)^3p+C_3^1(1-p)p^3\right]+5\times C_4^2(1-p)^2p^2=f(p)$，

所以$f(p)$关于$p=\frac{1}{2}$对称，且p越极端，越可能快结束，有$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\le\frac{4}{5}-\frac{1}{2}$，

得$f\left(\frac{1}{3}\right)>f\left(\frac{4}{5}\right)$，则C不正确.



12．AC【详解】建立如图所示的空间直角坐标系，

则$A(0,0,0),B(1,0,0),C(1,1,0),D(0,1,0),P(0,0,1),G\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，

$\overrightarrow{BD}=(-1,1,0),\overrightarrow{BP}=(-1,0,1)$，设平面$PBD$的一个法向量为$\vec{m}=(x,y,z)$，

则有$\begin{cases}\overrightarrow{BD}\cdot\vec{m}=-x+y=0\\ \overrightarrow{BP}\cdot\vec{m}=-x+z=0\end{cases}$，令$x=1$则$y=1,z=1$，所以$\vec{m}=(1,1,1)$，

$\overrightarrow{PG}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$,则点$G$到平面$PBD$的距离$d=\frac{\left|\overrightarrow{PG}\cdot\vec{m}\right|}{|\vec{m}|}=\frac{\sqrt{3}}{6}$，

所以当$MG\perp$平面PBD时，MG的最小值为$\frac{\sqrt{3}}{6}$，故A正确；

因为$\overrightarrow{AG}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left|\overrightarrow{AG}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2},MA+MG=1>AG$，所以点$M$的轨迹在以$A,G$为焦点的椭球面，

又因为$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\vec{m}$，所以$AG\perp$平面$PBD$，即平面$PBD$垂直于椭球面的长轴所在直线$AG$，

所以点M的轨迹是圆，故B错误；

设AH$\perp$平面PBD，$H\in$平面PBD，由以上过程知G到平面PBD的距离$d=\frac{\left|\overrightarrow{PG}\cdot\vec{m}\right|}{|\vec{m}|}=\frac{\sqrt{3}}{6}$，

所以A到平面PBD的距离$AH=2d=\frac{\sqrt{3}}{3},MH^2=AM^2-AH^2=\frac{1}{12}$，所以点$M$的轨迹围成图形是以$H$为圆心$MH$为半径的圆，面积等于$\pi MH^2=\frac{\pi}{12}$，故C正确；

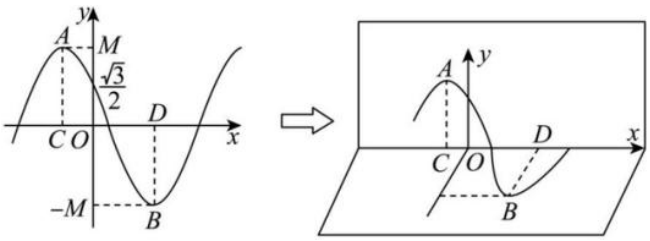
$\overrightarrow{DC}=(1,0,0)$，设$CD$与平面$PBD$所成的角为$\theta$，则有$\sin\theta=\cos<\overrightarrow{DC},\vec{m}>=\frac{\overrightarrow{DC}\cdot\vec{m}}{\left|\overrightarrow{DC}\right||\vec{m}|}=\frac{\sqrt{3}}{3}>\frac{1}{2}$，

所以$\theta>30^\circ$，因为$BM\subset$平面PBD，所以BM与CD所成角$\ge\theta>30^\circ$，

故不存在点M，使得直线BM与CD所成角为30°，故D错误.

13. 15【详解】 $\left(x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的展开式的通项公式为：$T_{r+1}=C_6^r x^{6-r}\left(-x^{-\frac{1}{2}}\right)^r=(-1)^r C_6^r x^{6-\frac{3}{2}r}$，令 $6-\frac{3}{2}r=0$，解得：$r=4$，故 $T_5=(-1)^4 C_6^4=15$.

14. $\frac{5\pi}{6}$ **【详解】** 如图，因为 $f(x)$ 的周期为 $T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$，所以 $CD=\frac{T}{2}=2$，



$AC=M, BC=\sqrt{M^2+4}$，所以 $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{2M^2+4}=\sqrt{10}$，解得 $M=\sqrt{3}$，所以 $f(x)=\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}x+\varphi\right)$，所以 $f(0)=\sqrt{3}\sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\varphi=\frac{1}{2}$，因为 $0<\varphi<\pi$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$，又因为函数 $f(x)$ 在 y 轴右侧单调递减，所以 $\varphi=\frac{5\pi}{6}$.

15. $(n^2-n+1)\cdot 3^{n+1}$ **【详解】** 由题意，$T_n=1^2\times 3^1+2^2\times 3^2+\ldots+n^2\cdot 3^n$，

$3T_n=1^2\times 3^2+2^2\times 3^3+\cdots+n^2\cdot 3^{n+1}$，

两式相减得 $2T_n=-3+(1^2-2^2)\cdot 3^2+(2^2-3^2)\cdot 3^3+\cdots+\left[(n-1)^2-n^2\right]\cdot 3^n+n^2\cdot 3^{n+1}$，

即 $2T_n=-3-(3\cdot 3^2+5\cdot 3^3+\cdots+(2n-1)\cdot 3^n)+n^2\cdot 3^{n+1}$，

即 $2T_n=-3-(S_n-3)+n^2\cdot 3^{n+1}$，

即 $2T_n=-S_n+n^2\cdot 3^{n+1}=-\left[(n-1)\cdot 3^{n+1}+3\right]+n^2\cdot 3^{n+1}=(n^2-n+1)\cdot 3^{n+1}-3$

所以 $2T_n+3=(n^2-n+1)\cdot 3^{n+1}$.

16. $[-3,1]$ **【详解】** 由题意，$f(x)$ 是定义在R上的偶函数，且当 $x\ge 0$ 时，$f(x)=2^x$，

设 $x<0$，则 $-x>0$，即 $f(-x)=2^{-x}=f(x)$，所以 $f(x)=2^{-x}$，即 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}, x<0\\ 2^x, x\ge 0\end{cases}=2^{|x|}$，

由 $f(x+a)\le f^2(x)$，$x\in[1,3]$，即 $2^{|x+a|}\le 2^{2|x|}$，所以 $|x+a|\le|2x|=2x$，即 $-2x\le x+a\le 2x$，即 $-3x\le a\le x$ 恒成立，所以 $-3\le a\le 1$，即实数 a 的取值范围是 $[-3,1]$.

17.【详解】（1） $2S_n=(n+1)a_n\Rightarrow 2a_n=2S_n-2S_{n-1}=(n+1)a_n-na_{n-1}\ (n\ge 2)$

$\Rightarrow (n-1)a_n=na_{n-1}(n\ge 2)\Rightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n}{n-1}$，

所以 $\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_2}{a_1}=\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdots\frac{2}{1}=n$，所以 $\frac{a_n}{a_1}=n$，即 $a_n=n, n\ge 2$，

经检验$a_1=1$满足上式子，故$a_n=n$ ……5分

（2）$\frac{a_n}{2}+\frac{2}{a_n}\le m\Rightarrow\frac{n}{2}+\frac{2}{n}\le m\Rightarrow\frac{1}{2}\left(n+\frac{4}{n}\right)\le m$，

因为$\frac{1}{2}\left(n+\frac{4}{n}\right)\geqslant 2$，当且仅当$n=2$时成立，所以$b_1=0$，$b_2=1$，

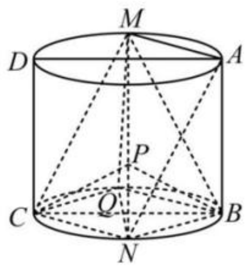
当$m\ge 3$，因为$\frac{2m-1}{2}+\frac{2}{2m-1}=m-\frac{1}{2}+\frac{2}{2m-1}\le m$，

$\frac{2m}{2}+\frac{2}{2m}=m+\frac{1}{m}>m$，所以能使$\frac{n}{2}+\frac{2}{n}\le m$成立的$n$的最大值为$2m-1$，

所以$b_m=2m-1(m\ge 3)$，

所以$\{b_m\}$的前20项和为$0+1+5+7+\cdots+39=0+1+\frac{(5+39)\times 18}{2}=397$． ……10分

18．（1）证明：设轴截面正方形$ABCD$边长为$2a$，取弧BC另一侧的中点Q，



则BC与NQ垂直平分，且$BC=NQ=2a$，

所以四边形$BNCQ$为正方形，$BQ=NC=\sqrt{2}a$，

因为M为弧AD中点，所以$MQ\underline{\parallel}AB$，四边形$ABQM$为矩形，

所以$AM\underline{\parallel}BQ$，所以$AM\underline{\parallel}CN$，所以四边形$AMCN$为平行四边形，

因为$AN=\sqrt{AB^2+BN^2}=\sqrt{6}a$，$MN=\sqrt{MQ^2+QN^2}=2\sqrt{2}a$，

所以$AM^2+AN^2=MN^2=8a^2$，所以$AM\perp AN$，所以四边形$ANCM$为矩形； ……5分

（2）解：由（1）知，$MB=MC=\sqrt{MQ^2+QB^2}=\sqrt{6}a$，$BN=CN=\sqrt{2}a$，$MN=2\sqrt{2}a$，

所以$\angle MBN=\angle MCN=\frac{\pi}{2}$

所以$\triangle MNB\cong\triangle MNC$，$Rt\triangle MBN$斜边$MN$上的高$h=\frac{\sqrt{6}a\cdot\sqrt{2}a}{2\sqrt{2}a}=\frac{\sqrt{6}}{2}a$，

作$BP\perp MN$交MN于点P，连接CP，

因为$\angle BNP=\angle CNP$，$BN=CN$，$PN=PN$，所以$\triangle BPN\cong\triangle CPN$，

则$\angle CPN=\angle BPN=90^\circ$，所以$CP\perp MN$，

$\angle BPC$即为二面角$B-MN-C$的平面角，$BP=CP=\frac{\sqrt{6}}{2}a$，$BC=2a$，

在$\triangle BPC$中，由余弦定理得$\cos\angle BPC=\frac{BP^2+CP^2-BC^2}{2BP\times CP}=\frac{3a^2-4a^2}{3a^2}=-\frac{1}{3}$，

二面角$B-MN-C$的余弦值为$-\frac{1}{3}$. ……12分

19.【详解】(1）方法一：随机变量X的可能取值为0，1，2，

$P(X=0)=\frac{C_3^3}{C_5^3}=\frac{1}{10}$，$P(X=1)=\frac{C_2^1C_3^2}{C_5^3}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$，$P(X=2)=\frac{C_2^2C_3^1}{C_5^3}=\frac{3}{10}$，

随机变量 X 的分布列如下表：

X	0	1	2
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$

随机变量 X 的期望为 $E(X)=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{6}{10}+2\times\frac{3}{10}=1.2$ ……………………………………6 分

法二：随机变量 X 服从超几何分布 $X\sim H(3,2,5)$，所以 $E(X)=3\times\frac{2}{5}=\frac{6}{5}$.

（2）设脱落一个"学"为事件 A，脱落一个"好"为事件 B，脱落一个"数"为事件 C，

事件 M 为脱落两个字 $M=AA+BB+AB+AC+BC$，

$P(AA)=\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{1}{10}$，$P(BB)=\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{1}{10}$，

$P(AB)=\frac{C_2^1\cdot C_2^1}{C_5^2}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$，$P(AC)=\frac{C_2^1\cdot C_1^1}{C_5^2}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$，$P(BC)=\frac{C_2^1\cdot C_1^1}{C_5^2}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$，

所以某同学捡起后随机贴回，标语恢复原样的概率为

$P=\left(P(AA)+P(BB)\right)\times1+\left(P(AB)+P(AC)+P(BC)\right)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{5}$，……………………………12 分

法二：掉下的两个字不同的概率为 $p=\frac{10-2}{10}=0.8$，

所以标语恢复原样的概率为 $(1-p)+\frac{1}{2}p=0.6$.

20.（1）解：因为 $\overline{CD}=2\overline{DB}$，则 $\overline{AD}-\overline{AC}=2\left(\overline{AB}-\overline{AD}\right)$，所以，$3\overline{AD}=2\overline{AB}+\overline{AC}$，

所以，$3\overline{AD}\cdot\overline{CB}=\left(2\overline{AB}+\overline{AC}\right)\cdot\overline{CB}=\left(2\overline{AB}+\overline{AC}\right)\cdot\left(\overline{AB}-\overline{AC}\right)=2\overline{AB}^2-\overline{AC}^2-\overline{AB}\cdot\overline{AC}$

$=2c^2-b^2-bc\cos A=7-2\cos A=6$，

所以，$\cos A=\frac{1}{2}$，又因为 $0<A<\pi$，故 $A=\frac{\pi}{3}$.……………………………………………………5 分

（2）解：因为 $\begin{cases}C-B=\frac{2\pi}{3}\\C+B=\pi-A\end{cases}$，所以 $C=\frac{5\pi}{6}-\frac{A}{2}$，$B=\frac{\pi}{6}-\frac{A}{2}$，

因为 $c=2b$，$\sin C=2\sin B$，则 $\sin\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{A}{2}\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{A}{2}\right)$，

所以，$\frac{1}{2}\cos\frac{A}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A=\cos\frac{A}{2}-\sqrt{3}\sin\frac{A}{2}$，化简整理得 $\tan\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{3}}{9}$，

所以$\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{A}{2}}=\frac{2\tan\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}=\frac{3\sqrt{3}}{14}$，

故$\triangle ABC$的面积为$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{3\sqrt{3}}{14}$.……………………………………………………12 分

21.（1）设$P\left(t^2,2t\right)$，则$PQ\geq PC_2-1=\sqrt{\left(t^2-2\right)^2+4t^2}-1=\sqrt{{}^4+4}-1\geq 1$，

当$P(0,0)$，Q为PC_2线段与圆C_2的交点时，$PQ_{\min}=1$……………………………………………… 4 分

（2）题意可知$P(4,4)$，过P点直线$y-4=k(x-4)$与圆C_2相切，

则$\frac{|2k-4|}{\sqrt{1+k^2}}=r$，即$\left(4-r^2\right)k^2-16k+16-r^2=0$，①

设直线AB为：$m(x-4)+n(y-4)=1$，则与抛物线C的交点方程可化为：

$(y-4)^2+8(y-4)\left[m(x-4)+n(y-4)\right]=4(x-4)\left[m(x-4)+n(y-4)\right]$，

令$z=\frac{y-4}{x-4}$，则：$(1+8n)z^2+(8m-4n)z-4m=0$，②

题意有，①②方程同解，故有$y=\left[\left(16-r^2\right)-\left(4-r^2\right)\right]+\frac{3}{4}\times(-16)=[-4m-8n-1]+\frac{3}{4}(8m-4n)$，

即$2m-11n=1$，所以直线AB为：$\frac{11n+1}{2}(x-4)+n(y-4)=1$，

即$x-6+n(11x+2y-52)=0$，由$\begin{cases}x-6=0\\11x+2y-52=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=6\\y=-7\end{cases}$，

直线AB恒过$(6,-7)$．……………………………………………………………………12 分

22.（1）（i）由$f(x)=ax^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x$，$g(x)=bx\ln x$，

则$f'(x)=3ax^2-3x+\frac{1}{2}$，$g'(x)=b(1+\ln x)$，

由题意，1 是平滑函数$F(x)$的“平滑点”，

可知$a-1=0$，且$3a-\frac{5}{2}=b$，解得：$a=1$，$b=\frac{1}{2}$.……………………………………………2 分

（ii）由题意，$F(x)=\begin{cases}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x,0<x<1\\\frac{x\ln x}{2},x\geq 1\end{cases}$，过点$P(2,t)$作$F(x)$的切线，

切点$(x,F(x))$满足方程：$F(x)-t=F'(x)(x-2)$，

故题意等价于方程：$t=F(x)-F'(x)(x-2)$有 3 个不同根，

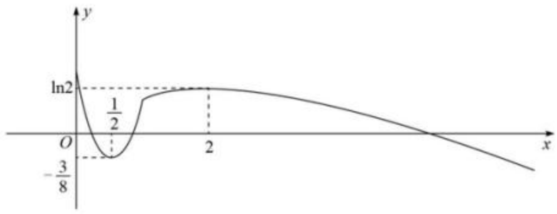
设$p(x)=F(x)-F'(x)(x-2)$，

则$p'(x)=-F''(x)(x-2)=\begin{cases}-(6x-3)(x-2),0<x<1\\ \dfrac{2-x}{2x},x\ge 1\end{cases}$，

令$p'(x)>0$，即$\dfrac{1}{2}<x<2$；令$p'(x)<0$，即$0<x<\dfrac{1}{2}$或$x>2$，

所以函数$p(x)$在$x\in\left(\dfrac{1}{2},2\right)$单调递增，在$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$和$(2,+\infty)$上单调递减，

且$p\left(\dfrac{1}{2}\right)=F\left(\dfrac{1}{2}\right)-F'\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{2}-2\right)=-\dfrac{3}{8}$，$p(2)=F(2)-F'(2)(2-2)=\ln 2$，如图所示，



所以$t\in\left(-\dfrac{3}{8},\ln 2\right)$.……6分

（2）题意等价于：$\forall b>0$，是否$\exists a\ge 1$，使得$\begin{cases}ax^3-\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{1}{2}x=bx\ln x\\ 3ax^2-3x+\dfrac{1}{2}=b(1+\ln x)\end{cases}$有解，

消去a有：$1-\dfrac{3}{2}x=b(2\ln x-1)$，$b=\dfrac{1-\dfrac{3}{2}x}{2\ln x-1}$，其中由$b>0$，可得$x\in\left(\dfrac{2}{3},\sqrt{e}\right)$，

故题意进一步化简$\forall x\in\left(\dfrac{2}{3},\sqrt{e}\right)$，是否$\exists a\ge 1$，使得$a=\dfrac{3x\ln x-3x+1}{2x^2(2\ln x-1)}$成立，

$\Leftrightarrow \forall x\in\left(\dfrac{2}{3},\sqrt{e}\right)$，$3x\ln x-3x+1\leqslant 2x^2(2\ln x-1)$是否恒成立，

设$q(x)=(4x^2-3x)\ln x-2x^2+3x-1$，$q'(x)=(8x-3)\ln x$，

故$x\in\left(\dfrac{2}{3},1\right)$时，单调递减；$x\in(1,\sqrt{e})$，$q(x)$单调递增，

故$q(x)\ge q(1)=0$得证，

即$\forall b>0$，$3a\ge 1$，使得$F(x)$存在的“平滑点”．……12分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。