河南省信阳高级中学2022-2023学年高三下期02月测试
数学（文科）答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	D	C	B	B	A	C	D	A	D	D	A

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1.C 【解析】由题意,得全集$U=\{x|x>1\}$,集合$A=\{x|x>2\}$.根据补集的定义,得$\complement_U A=\{x|1<x\leqslant 2\}=(1,2]$.故选C.

2.D 【解析】根据题意,得$z=\dfrac{2+\mathrm{i}}{4-3\mathrm{i}}=\dfrac{(2+\mathrm{i})(4+3\mathrm{i})}{(4-3\mathrm{i})(4+3\mathrm{i})}=\dfrac{5+10\mathrm{i}}{25}=\dfrac{1+2\mathrm{i}}{5}$,所以$\bar{z}=\dfrac{1-2\mathrm{i}}{5}$.所以$\bar{z}$在复平面内对应的点为$\left(\dfrac{1}{5},-\dfrac{2}{5}\right)$,位于第四象限.故选D.

3.C 【解析】根据题意,得$\begin{cases}M=50,\\ M\cdot \mathrm{e}^{10k}=200,\end{cases}$解得$\begin{cases}M=50,\\ \mathrm{e}^{10k}=4.\end{cases}$故$F(x)=50\times 4^{\frac{1}{10}x}$.当$x=30$时,$F(30)=50\times 4^3=3\,200$.故选C.

4.B 【解析】设等比数列$\{a_n\}$的公比为q.因为$a_5a_{10}=a_6a_9=8a_9$,且由题可得$a_9\neq 0$,所以$a_6=8$.所以$\dfrac{a_6}{a_3}=q^3=8$,解得$q=2$.所以$a_1=\dfrac{a_3}{q^2}=\dfrac{1}{4}$.所以$S_5=\dfrac{\frac{1}{4}(1-2^5)}{1-2}=\dfrac{31}{4}$.故选B.

5.B 【解析】输入$k=1$,第一次循环:$1^2<1+10$,$k=1+1=2$,$n=0+1=1$;第二次循环:$2^2<2+10$,$k=2+1=3$,$n=1+1=2$;第三次循环:$3^2<3+10$,$k=3+1=4$,$n=2+1=3$;第四次循环:$4^2>4+10$,结束循环,此时$k=4$,$n=3$.所以输出$n=3$.故选B.

6.A 【解析】由题图可知,函数的定义域是$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,排除C;函数$f(x)=x\ln|x|$是奇函数,排除B;当$0<x<1$时,$x-1<0$,$\mathrm{e}^x>0$,所以$f(x)=(x-1)\mathrm{e}^x<0$,排除D.故选A.

7.C 【解析】根据题意,$f(x)=\sqrt{5}\sin(x+\varphi)\left(\cos\varphi=\dfrac{2\sqrt{5}}{5},\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$.因为$\exists\,\theta\in\mathbf{R}$,$\forall\,x\in\mathbf{R}$,$f(x)\leqslant f(\theta)$,所以$f(\theta)=f(x)_{\max}=\sqrt{5}$,所以$\theta+\varphi=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$.所以$\cos\theta=\sin\varphi$,$\sin\theta=\cos\varphi$,所以$\tan\theta=\dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi}=2$.故$\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=-\dfrac{4}{3}$.故选C.

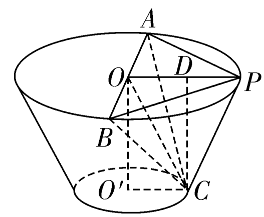
8.D 【解析】设AB的中点为M,CD的中点为N,圆O的半径为r.由题可得$r=\dfrac{1}{2}\sqrt{1^2+2^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$,则$(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})\cdot(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD})=4\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=4(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OM})\cdot(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{ON})=4(\overrightarrow{PO}^2-\overrightarrow{OM}^2)=4\times\left(\dfrac{5}{4}-\dfrac{1}{4}\right)=4$.故选D.

9.A 【解析】因为$|AB|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}|F_1F_2|=\sqrt{3}c$,所以$|OA|=\dfrac{\sqrt{3}c}{2}$.因为$k_{AB}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,所以$\angle AOF_1=30^\circ$.所以$\cos\angle AOF_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.根据余弦定理,得$|AF_1|=\sqrt{|OA|^2+|OF_1|^2-2|OA|\cdot|OF_1|\cos\angle AOF_1}=\sqrt{\dfrac{3}{4}c^2+c^2-2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}c\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}c}=\dfrac{1}{2}c$,$|AF_2|=\sqrt{|OA|^2+|OF_2|^2-2|OA|\cdot|OF_2|\cos\angle AOF_2}=\sqrt{\dfrac{3}{4}c^2+c^2+2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}c\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}c}=\dfrac{\sqrt{13}}{2}c$.所以

$|AF_2|-|AF_1|=\frac{\sqrt{13}}{2}c-\frac{1}{2}c=2a$. 故双曲线的离心率为 $e=\frac{4}{\sqrt{13}-1}=\frac{\sqrt{13}+1}{3}$. 故选 A.

10. D 【解析】把函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到 $g(x)=A\cos\left[2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\varphi\right]=A\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}+\varphi\right)$ 的图象. 因为 $g(x)$ 为偶函数，所以 $-\frac{\pi}{3}+\varphi=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，即 $\varphi=k\pi+\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$. 又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$. 因为 $f(x)=A\cos(2x+\varphi)\left(|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，所以 $f\left(\frac{T}{8}\right)=f\left(\frac{\pi}{8}\right)=A\cos\left(2\times\frac{\pi}{8}+\varphi\right)=\sqrt{2}-\sqrt{6}$，即 $A\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{2}-\sqrt{6}$，解得 $A=4$. 所以 $f(x)=4\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，$f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=4\cos\left[2\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=4\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=2\sqrt{3}$. 故选 D.

11. D 【解析】方法一：由题可得 $AB=8$. 因为 $AP=BP$，所以 $S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}\times8\times4=16$. 过点 A 向下底面作垂线，垂足为 A_1，根据圆的性质，得 $CA_1=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$. 因为圆台的高 $h=4$，所以 $CA=\sqrt{4^2+(2\sqrt{5})^2}=6$，$V_{C-ABP}=\frac{1}{3}\times16\times4=\frac{64}{3}$. 因为 $AC=BC=6$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times8\times\sqrt{36-16}=8\sqrt{5}$. 设点 P 到平面 ABC 的距离为 d，则 $V_{P-ABC}=\frac{1}{3}\times8\sqrt{5}d=\frac{64}{3}$，解得 $d=\frac{8\sqrt{5}}{5}$. 故选 D.

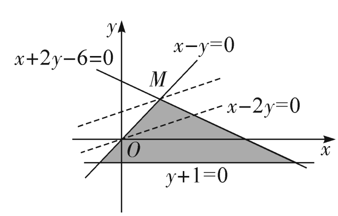


方法二：如图，过点 C 作上底面的垂线交上底面于点 D，设上下底面的圆心分别为 O,O'，易得 O,D,P 三点在同一条直线上. 因为 $AB\perp OO'$，$AB\perp OP$，$OO'\cap OP=O$，所以 $AB\perp$ 平面 $POO'C$，所以 $AB\perp OC$. 因为在 $\mathrm{Rt}\triangle OO'C$ 中，$OC=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot OC=\frac{1}{2}\times8\times2\sqrt{5}=8\sqrt{5}$. 设点 P 到平面 ABC 的距离为 d，因为 $S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}AB\cdot OP=\frac{1}{2}\times8\times4=16$，$V_{P-ABC}=V_{C-ABP}$，所以 $\frac{1}{3}S_{\triangle ABP}\cdot OO'=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot d$，即 $\frac{1}{3}\times16\times4=\frac{1}{3}\times8\sqrt{5}\times d$. 所以 $d=\frac{8\sqrt{5}}{5}$. 故选 D.

12. A 【解析】由数形结合可得，过点 $(2,b)$ 不可能作曲线 $y=2e^x$ 的切线，则 $b>2e^2$. 对于满足此条件的任意的 b，函数 $f(x)=\frac{a^x}{\ln a}-\frac{b}{2}x^2+e^2x+1(a>1)$ 恒有两个不同的极值点等价于 $f'(x)=a^x-bx+e^2(a>1)$ 恒有两个不同的变号零点，等价于方程 $e^{x\ln a}-bx+e^2=0$ 有两个不同的解. 令 $t=x\ln a$，则 $e^t-\frac{bt}{\ln a}+e^2=0\Rightarrow\frac{b}{\ln a}=\frac{e^t+e^2}{t}$，$t>0$，即直线 $y=\frac{b}{\ln a}$ 与函数 $y=\frac{e^t+e^2}{t}$ 的图象有两个不同的交点. 记 $g(t)=\frac{e^t+e^2}{t}$，则 $g'(t)=\frac{e^t\cdot t-(e^t+e^2)}{t^2}=\frac{e^t(t-1)-e^2}{t^2}$. 记 $h(t)=e^t(t-1)-e^2$，则 $h'(t)=e^t(t-1)+e^t\cdot1=e^t\cdot t>0$，所以 $h(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. 令 $h(t)=0$，得 $t=2$. 当 $t\in(0,2)$ 时，$h(t)<0$，当 $t\in(2,+\infty)$ 时，$h(t)>0$，所以 $g(t)$ 在 $(0,2)$ 上单调递减，$(2,+\infty)$ 上单调递增. 因为 t 趋近于 0，和 t 趋近于正无穷时，$g(t)$ 均趋近于正无穷，所以 $\frac{b}{\ln a}>g(2)=e^2$. 所以 $\ln a<\frac{b}{e^2}$. 因为 $b>2e^2$，所以 $\frac{b}{e^2}>2$，所以 $\ln a\leqslant2\Rightarrow1<a\leqslant e^2$. 即实数 a 的取值范围是 $(1,e^2]$. 故选 A.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. -2 【解析】画出 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x+2y-6\leqslant0,\\x-y\geqslant0,\\y+1\geqslant0\end{cases}$ 表示的可行域，如图



阴影部分所示，目标函数 $z=x-2y$，即直线 $y=\frac{x}{2}-\frac{z}{2}$，平移直线可知，当直线 $y=\frac{x}{2}-\frac{z}{2}$ 经过点 M 时，$z=x-2y$ 取得最小值. 联立 $\begin{cases}x+2y-6=0,\\x-y=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=2,\\y=2,\end{cases}$ 则点 $M(2,2)$. 所以 $z_{\min}=2-2\times2=-2$.

14. $\sqrt{21}$ 【解析】设准线与 y 轴交于点 M，则 $|FM|=2$. 由抛物线定义可得 $|PF|=|PA|$. 又 $|PF|=|AF|$，所以 $\triangle PAF$ 是等边三角形. 所以 $\angle FAM=90^\circ-60^\circ=30^\circ$. 所以 $|AF|=2|FM|=4$. 所以 $|PA|=4$. 因为准线 l 的方程是 $y=-1$，所以点 P 的纵坐标为 3. 代入 $x^2=4y$ 中，得 $x^2=12$，解得 $x=\pm2\sqrt{3}$. 所以点 $P(-2\sqrt{3},3)$ 或 $P(2\sqrt{3},3)$. 所以 $|OP|=\sqrt{12+3^2}=\sqrt{21}$.

15. $\frac{2n}{n+1}$ 【解析】由题可知，数列 $\{a_{n+1}-a_n\}(n\in\mathbf{N}^*)$ 是以 $a_2-a_1=1$ 为首项，1 为公差的等差数列，所以 $a_{n+1}-a_n=1+(n-1)\times1=n(n\in\mathbf{N}^*)$. 所以 $(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_{n+1}-a_n)=a_{n+1}-a_1=1+2+\cdots+n$. 所以 $a_{n+1}-a_1=\frac{n(n+1)}{2}$. 所以 $a_{n+1}=\frac{n(n+1)}{2}+2$. 故 $b_n=\frac{1}{a_{n+1}-2}=\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}+2-2}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$，

所以数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2n}{n+1}$.

16. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ 【解析】设点 $P(x,y)$，因为 $\frac{|PA|}{|PB|}=2$，所以 $\frac{\sqrt{(x+1)^2+y^2}}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}=2$，整理可得 $\left(x-\frac{5}{3}\right)^2+y^2=\frac{16}{9}$. 所以动点 P 的轨迹是以 $\left(\frac{5}{3},0\right)$ 为圆心，$\frac{4}{3}$ 为半径的圆. 设该圆的圆心为点 M. 显然，点 A,C 在圆 M 的外部. 当直线 AP 与圆 M 相切时，$\angle PAC$ 取得最大值或最小值，此时 $\sin\angle PAB=\frac{|MP|}{|MA|}=\frac{1}{2}$，所以 $\angle PAB=\frac{\pi}{6}$. 所以 $\angle PAC$ 的最大值为 $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}$. 故 $\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

(一)必考题：共 60 分.

17.【解析】(1)因为在 $\triangle ABC$ 中，$a\sin B=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，$b\cos A=\frac{1}{2}$，

所以 $a\sin B=3\sqrt{3}b\cos A$. 由正弦定理得 $\sin A\sin B=3\sqrt{3}\sin B\cos A$. ………… 2 分

因为 $\sin B>0$，所以 $\sin A=3\sqrt{3}\cos A$，所以 $\tan A=3\sqrt{3}$. ………… 4 分

(2)因为 $\tan A=3\sqrt{3}$，所以 $A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\sin A=\frac{3\sqrt{21}}{14}$，$\cos A=\frac{\sqrt{7}}{14}$. ………… 6 分

又 $b\cos A=\frac{1}{2}$，所以 $b=\sqrt{7}$. ………… 8 分

因为 $a=3$，根据余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，所以 $3^2=(\sqrt{7})^2+c^2-2\times\sqrt{7}c\times\frac{\sqrt{7}}{14}$，

解得 $c=2$(负值舍去). ………… 10 分

所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times\sqrt{7}\times2\times\frac{3\sqrt{21}}{14}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. ………… 12 分

18.【解析】(1)根据公式，得

$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\frac{100\times(20\times10-60\times10)^2}{80\times20\times70\times30}$ ………… 2 分

$\approx4.762>3.841$. ………… 3 分

故有 95% 的把握认为到店人员是否购买与年龄有关. ………… 4 分

(2)现从购买组的人中按分层抽样方法(各层按比例分配)抽取 6 人,其中 60 岁以下的人数为 $6\times\frac{20}{30}=4$,分别设为 a,b,c,d;60 岁及以上的人数为 $6\times\frac{10}{30}=2$,分别设为 A,B. ………………………………… 6 分

从这 6 人中随机抽取 2 人的所有可能的结果为 $(a,b),(a,c),(a,d),(a,A),(a,B),(b,c),(b,d),(b,A),(b,B),(c,d),(c,A),(c,B),(d,A),(d,B),(A,B)$,共 15 种, ………………………………… 8 分

其中 2 人全部为 60 岁以下的结果有 $(a,b),(a,c),(a,d),(b,c),(b,d),(c,d)$,共 6 种, ……………… 10 分

所以这 2 人全部为 60 岁以下的概率为 $P=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$. ………………………………… 12 分

19.【解析】(1)方法一:存在,且 $\lambda=\frac{1}{4}$,理由如下:

因为四边形 $ABCD$ 为菱形,所以 $AB=AD$,BD 与 AC 互相垂直且平分.

因为 $\angle ADC=120°$,所以 $\angle BAD=60°$. 所以三角形 ABD 是等边三角形.

因为 $ED\perp$ 平面 $ABCD$,$AC\subset$ 平面 $ABCD$,$BD\subset$ 平面 $ABCD$. 所以 $ED\perp AC$,$ED\perp BD$.

因为 $ED\cap BD=D$,$ED\subset$ 平面 $BDEF$,$BD\subset$ 平面 $BDEF$,所以 $AC\perp$ 平面 $BDEF$.

又 $EM\subset$ 平面 $BDEF$,所以 $AC\perp EM$. ………………………………… 2 分

过点 F 作 $FG\perp DE$ 于点 G,易得四边形 $BDGF$ 为矩形.

设 $AB=ED=\frac{1}{\lambda}FB=2a$,则 $BD=FG=2a$,$BM=DM=\frac{1}{2}BD=a$.

因为 $FB/\!/ED$,所以 $FB\perp BD$. 所以 $EM^2=DE^2+DM^2=5a^2$,$EF^2=GF^2+GE^2=4a^2+(2a-2\lambda a)^2$,$FM^2=BF^2+BM^2=a^2+4\lambda^2a^2$. ………………………………… 4 分

欲使 $EM\perp$ 平面 AFC,只需 $EM\perp MF$. ………………………………… 5 分

即 $EM^2+FM^2=EF^2$,所以 $5a^2+a^2+4\lambda^2a^2=4a^2+(2a-2\lambda a)^2$,解得 $\lambda=\frac{1}{4}$.

所以存在实数 λ,使得 $EM\perp$ 平面 AFC,且 $\lambda=\frac{1}{4}$. ………………………………… 6 分

方法二:存在,且 $\lambda=\frac{1}{4}$,理由如下:

若 $EM\perp$ 平面 AFC,又 $MF\subset$ 平面 AFC,

所以 $EM\perp MF$,即 $\angle DME+\angle BMF=\frac{\pi}{2}$. ………………………………… 1 分

因为 $ED\perp$ 平面 $ABCD$,$FB/\!/ED$,所以 $FB\perp$ 平面 $ABCD$.

因为 $BD\subset$ 平面 $ABCD$,所以 $ED\perp BD$,$FB\perp BD$.

所以 $\angle MFB+\angle BMF=\frac{\pi}{2}$,所以 $\angle MFB=\angle DME$. ………………………………… 3 分

所以 $\mathrm{Rt}\triangle MFB\backsim\mathrm{Rt}\triangle EMD$,

故 $\frac{DM}{BF}=\frac{DE}{BM}$,即 $DM\cdot BM=BF\cdot DE=\lambda DE^2$. ………………………………… 4 分

在菱形 $ABCD$ 中,$\angle ADM=60°$,所以 $DM=BM=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}DE$.

所以 $\lambda=\frac{DM^2}{DE^2}=\frac{1}{4}$.

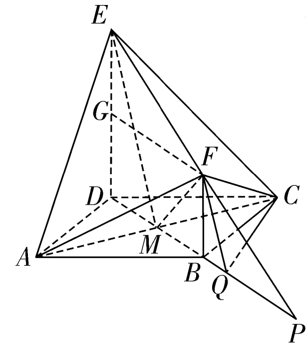
因为四边形 $ABCD$ 为菱形,所以 $AB=AD$,BD 与 AC 互相垂直且平分.

因为 $ED\perp$ 平面 $ABCD$,$AC\subset$ 平面 $ABCD$,所以 $ED\perp AC$.

因为 $ED\cap BD=D$,$ED\subset$ 平面 $BDEF$,$BD\subset$ 平面 $BDEF$,所以 $AC\perp$ 平面 $BDEF$.

又 $EM\subset$ 平面 $BDEF$,所以 $AC\perp EM$.

因此，$\lambda=\frac{1}{4}$ 时，$EM\perp$ 平面 AFC. ………………………………………… 6 分



(2)设 $AB=ED=2FB=2a$，因为 $FB\parallel ED$，所以 E,F,B,D 四点共面. 因为 $BF=\frac{1}{2}DE$，所以 $BF<DE$. 分别延长 EF 与 DB 相交于点 P，取 PM 的中点 Q，连接 FQ,CQ.

因为 $FB=\frac{1}{2}ED$，所以点 F 为 EP 的中点. ………………………… 7 分

所以 $FQ\parallel EM$，$FQ=\frac{1}{2}EM=\frac{\sqrt{5}}{2}a$.

故$\angle CFQ$(或其补角)为异面直线 EM 与 FC 所成的角. ………………… 9 分

因为 $FC=\sqrt{BF^2+BC^2}=\sqrt{a^2+4a^2}=\sqrt{5}a$，$BQ=\sqrt{FQ^2-FB^2}=\frac{1}{2}a$，

所以根据余弦定理，得

$CQ^2=BQ^2+BC^2-2BQ\cdot BC\cos 120^\circ=\frac{1}{4}a^2+4a^2+2\times\frac{1}{2}a\times 2a\times\frac{1}{2}=\frac{21a^2}{4}$. ………………… 10 分

所以 $\cos\angle CFQ=\dfrac{FC^2+FQ^2-CQ^2}{2FC\cdot FQ}=\dfrac{5a^2+\frac{5}{4}a^2-\frac{21}{4}a^2}{2\sqrt{5}a\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}a}=\frac{1}{5}$. ………………… 11 分

故异面直线 EM 与 FC 所成角的余弦值为 $\frac{1}{5}$. ………………………… 12 分

20.【解析】(1)因为$\triangle QF_1F_2$ 的面积为$\sqrt{6}$，

所以 $\frac{1}{2}\times 2c\times 1=\sqrt{6}$，解得 $c=\sqrt{6}$. ………………………………………… 1 分

因为$\overrightarrow{QF_1}\cdot\overrightarrow{QF_2}=-1$，$\overrightarrow{QF_1}=(-c-x_0,-1)$，$\overrightarrow{QF_2}=(c-x_0,-1)$，

所以$\overrightarrow{QF_1}\cdot\overrightarrow{QF_2}=(-c-x_0,-1)\cdot(c-x_0,-1)=x_0^2-c^2+1=x_0^2-(\sqrt{6})^2+1=-1$，解得 $x_0=\pm 2$.

因为点 Q 位于第一象限，所以 $Q(2,1)$. ………………………………………… 2 分

将点 $Q(2,1)$ 代入椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 中，得 $\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$. ………………………… 3 分

联立 $\begin{cases}c=\sqrt{6},\\ \frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1,\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ 解得 $a^2=8$，$b^2=2$. ………………………………………… 4 分

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$. ………………………………………… 5 分

(2)依题意可知，直线 QM 和直线 QN 的斜率存在，不为零且互为相反数.

设直线 QM 的斜率为 k，则直线 QN 的斜率为 $-k$. ………………………………… 6 分

由(1)可知 $Q(2,1)$，所以直线 QM 的方程为 $y-1=k(x-2)$.

由 $\begin{cases}y-1=k(x-2),\\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1,\end{cases}$ 消去 y 并化简，得 $(1+4k^2)x^2-(16k^2-8k)x+16k^2-16k-4=0$.

$\Delta=(16k^2-8k)^2-4(1+4k^2)(16k^2-16k-4)=16(2k+1)^2>0$，………………………… 8 分

则 $k\neq-\frac{1}{2}$，根据直线 QM，直线 QN 的对称性，可知 $k\neq\pm\frac{1}{2}$.

设 $M(x_1,y_1)$，则 $x_1+x_Q=x_1+2=\frac{16k^2-8k}{1+4k^2}$. ………………………………… 9 分

所以 $x_1=\frac{16k^2-8k}{1+4k^2}-2$. 所以 $y_1=k(x_1-2)+1=k\left(\frac{16k^2-8k}{1+4k^2}-2-2\right)+1=\frac{-4k^2-4k+1}{1+4k^2}$.

故 $M\left(\frac{16k^2-8k}{1+4k^2}-2,\frac{-4k^2-4k+1}{1+4k^2}\right)$. ………………………………………… 10 分

以 $-k$ 替换 k，得 $N\left(\frac{16k^2+8k}{1+4k^2}-2,\frac{-4k^2+4k+1}{1+4k^2}\right)$. …………………………………… 11 分

所以 $k_{MN}=\dfrac{\frac{-4k^2+4k+1}{1+4k^2}-\frac{-4k^2-4k+1}{1+4k^2}}{\frac{16k^2+8k}{1+4k^2}-2-\left(\frac{16k^2-8k}{1+4k^2}-2\right)}=\frac{8k}{16k}=\frac{1}{2}$.

所以直线 MN 的斜率为定值 $\frac{1}{2}$. ………………………………………………………………………… 12 分

21.【解析】(1) 由题意，得 $f'(x)=e^x-a$.

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)=e^x-a>0$，$f(x)$ 单调递增，无最小值，不满足题意. …………………… 1 分

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=\ln a$.

当 $x\in(-\infty,\ln a)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(\ln a,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$.

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上单调递减，在 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $f(x)$ 的最小值为 $f(\ln a)=e^{\ln a}-a\ln a-1=0$，即 $\ln a+\frac{1}{a}-1=0$. ………………… 3 分

设 $\varphi(a)=\ln a+\frac{1}{a}-1$，则 $\varphi'(a)=\frac{a-1}{a^2}$. 令 $\varphi'(a)=0$，得 $a=1$. ……………………… 4 分

当 $a\in(0,1)$ 时，$\varphi'(a)<0$；当 $a\in(1,+\infty)$ 时，$\varphi'(a)>0$，

所以 $\varphi(a)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

即 $\varphi(a)_{\min}=\varphi(1)=0$. 故 $\ln a+\frac{1}{a}-1=0$ 的解只有 $a=1$，综上所述，$a=1$. …………………… 6 分

(2) 由 (1) 可得 $f(x)=e^x-x-1\geqslant 0$，所以 $e^x\geqslant x+1$，当且仅当 $x=0$ 时等号成立. 当 $x>-1$ 时，不等式两边取对数，得 $x\geqslant\ln(x+1)$，所以 $\ln x\leqslant x-1$，当且仅当 $x=1$ 时等号成立. ………………… 7 分

当 $x\in(0,1)$ 时，设 $F(x)=xe^x-(1+x)-\ln x$，

则 $F(x)=e^{x+\ln x}-(1+x)-\ln x\geqslant x+\ln x+1-(1+x)-\ln x=0$，当且仅当 $x+\ln x=0$ 时，等号成立.

因为 $0.1+\ln 0.1\neq 0$，所以 $0.1e^{0.1}-1.1-\ln 0.1>0$，所以 $m_2>m_1$. ……………………………… 9 分

当 $x\in(0,1)$ 时，设 $G(x)=x+\ln x-\ln\frac{x}{1-x}$，因为 $0<1-x<1$，

所以 $G(x)=x+\ln x-\ln x+\ln(1-x)=x+\ln(1-x)<x+1-x-1=0$， ………………………… 10 分

所以 $x+\ln x<\ln x-\ln(1-x)$，即 $xe^x<\frac{x}{1-x}$.

故 $0.1e^{0.1}<\frac{0.1}{1-0.1}=\frac{1}{9}$，所以 $m_2<m_3$.

综上所述，$m_1<m_2<m_3$. ……………………………………………………………………………… 12 分

(二)选考题：共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.

22.【解析】(1) 由 $\begin{cases}y=t,\\x=2(t-2\sqrt{2}),\end{cases}$ 得 $x=2(y-2\sqrt{2})$. 所以 $x-2y+4\sqrt{2}=0$.

故直线 l 的普通方程是 $x-2y+4\sqrt{2}=0$. ………………………………………………………… 2 分

由 $\rho^2(1+3\sin^2\theta)=1$，得 $\rho^2+3\rho^2\sin^2\theta=1$，

代入公式 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\y=\rho\sin\theta,\end{cases}$ 得 $x^2+y^2+3y^2=1$. 所以 $x^2+4y^2=1$，即 $x^2+\frac{y^2}{\frac{1}{4}}=1$.

故曲线 C 的直角坐标方程是 $x^2+\frac{y^2}{\frac{1}{4}}=1$. …………………………………………………… 4 分

(2)方法一：由 $\theta=\beta$(其中 $\beta\in(0,\pi)$，且 $\tan\beta=-\frac{1}{2}$，$\rho\geqslant 0$)，得 $\sin\beta=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\beta=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$. ………… 5 分

现将射线 $\theta=\beta(\rho\geqslant 0)$代入曲线 C 的极坐标方程，可得 $\rho_M^2=\frac{1}{1+3\sin^2\beta}=\frac{1}{1+3\times\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{5}{8}$，

所以 $\rho_M=\frac{\sqrt{10}}{4}$. …………………………………………………… 7 分

又直线 l 的极坐标方程为 $\rho\cos\theta-2\rho\sin\theta+4\sqrt{2}=0$， ………………………… 8 分

现将 $\theta=\beta(\rho\geqslant 0)$代入直线 l 的极坐标方程，可得 $\rho_N=\frac{4\sqrt{2}}{2\sin\beta-\cos\beta}=\frac{4\sqrt{2}}{2\times\frac{\sqrt{5}}{5}-\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}=\sqrt{10}$. …… 9 分

所以 $|MN|=\rho_N-\rho_M=\sqrt{10}-\frac{\sqrt{10}}{4}=\frac{3\sqrt{10}}{4}$. …………………………… 10 分

方法二：由题可得射线 $\theta=\beta$(其中 $\beta\in(0,\pi)$，且 $\tan\beta=-\frac{1}{2}$，$\rho\geqslant 0$)的直角坐标方程为 $y=-\frac{1}{2}x(x\leqslant 0)$.

联立 $\begin{cases}x^2+\frac{y^2}{\frac{1}{4}}=1,\\ y=-\frac{1}{2}x(x\leqslant 0),\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-\frac{\sqrt{2}}{2},\\ y=\frac{\sqrt{2}}{4},\end{cases}$ 则点 $M\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$. …………………… 6 分

联立 $\begin{cases}x-2y+4\sqrt{2}=0,\\ y=-\frac{1}{2}x(x\leqslant 0),\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-2\sqrt{2},\\ y=\sqrt{2},\end{cases}$ 则点 $N(-2\sqrt{2},\sqrt{2})$. …………………… 8 分

所以 $|MN|=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+2\sqrt{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}-\sqrt{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{10}}{4}$. …………………… 10 分

23.【解析】(1)由已知可得

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=4-2ab\geqslant 4-2\cdot\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=2$，

当且仅当 $a=b=1$ 时，等号成立. ………………………………………………… 5 分

(2)因为 $a+b=2$，所以$(b+2)+a=4$，所以$\frac{1}{2|a|}=\frac{1}{2|a|}\cdot\frac{a+(b+2)}{4}=\frac{a}{8|a|}+\frac{b+2}{8|a|}$. ………………… 6 分

所以原式$=\frac{a}{8|a|}+\frac{b+2}{8|a|}+\frac{|a|}{2(b+2)}\geqslant\frac{a}{8|a|}+2\sqrt{\frac{b+2}{8|a|}\cdot\frac{|a|}{2(b+2)}}=\frac{a}{8|a|}+\frac{1}{2}$， ………………… 8 分

当且仅当$\frac{b+2}{8|a|}=\frac{|a|}{2(b+2)}$，即 $a=-4$，$b=6$，或 $a=\frac{4}{3}$，$b=\frac{2}{3}$ 时，等号成立.

因为 $a<0$ 时，$\left(\frac{a}{8|a|}\right)_{\min}=-\frac{1}{8}$，所以$\frac{1}{2|a|}+\frac{|a|}{2(b+2)}$的最小值为$\frac{3}{8}$. ………………………… 10 分