银川一中、昆明一中 2023 届高三联合考试一模

数学（文科）

本试卷满分 150 分，考试时间 120 分钟

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设全集 $U=\{1,3,5,7,9\}$，若集合 M 满足 $\complement_U M=\{1,3,5\}$，则（　　）

A. $7\subseteq M$　　B. $9\subseteq M$　　C. $7\in M$　　D. $9\notin M$

【答案】C

【解析】

【分析】由补集运算得出集合 M，再由元素与集合的关系判断.

【详解】因为全集 $U=\{1,3,5,7,9\}$，$\complement_U M=\{1,3,5\}$，所以 $M=\{7,9\}$.

根据元素与集合的关系可知，ABD 错误，C 正确.

故选：C

2. 复数 $z=\mathrm{i}(2+\mathrm{i})$，则 $|z|=$（　　）

A. $\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{5}$　　C. $-1+2\mathrm{i}$　　D. $1-2\mathrm{i}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据复数的乘法运算得 z，即可求得模长 $|z|$.

【详解】因为 $z=\mathrm{i}(2+\mathrm{i})=-1+2\mathrm{i}$，所以 $|z|=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$.

故选：B.

3. 下列判断不正确的是（　　）

A. "若 x，y 互为相反数，则 $x+y=0$"是真命题

B. "$\exists x\in\mathbf{N}$，$x^2+2x=0$"是特称命题

C. 若 $xy\neq 0$，则 x，y 都不为 0

D. "$x>1$ 且 $y>1$"是"$x+y>2$"的充要条件

【答案】D

【解析】

【分析】根据命题的相关概念和充分、必要条件逐项分析判断.

【详解】对 A：若 x，y 互为相反数，则 $x=-y$，即 $x+y=0$，

故"若 x，y 互为相反数，则 $x+y=0$"是真命题，A 正确；

对 B："$\exists x\in\mathbf{N}$，$x^2+2x=0$"含有存在量词，

故"$\exists x\in\mathbf{N}$，$x^2+2x=0$"是特称命题，B 正确；

对 C：若 $xy\neq 0$，则 $x\neq 0$ 且 $y\neq 0$，即 x，y 都不为 0，

故若 $xy \neq 0$，则 x，y 都不为 0，C 正确；

对 D：若“$x>1$ 且 $y>1$”，则“$x+y>2$”，

但“$x+y>2$”，不一定能得到“$x>1$ 且 $y>1$”，例如 $x=4, y=-1$，

故“$x>1$ 且 $y>1$”是“$x+y>2$”的充分不必要条件，D 不正确.

故选：D.

4. 已知向量 $\vec{a}=(m,2)$，$\vec{b}=(1,1)$，$\vec{c}=(1,3)$，且 $(2\vec{a}-\vec{b})\perp\vec{c}$，则实数 m 为（　　）

A. -4　　　　B. -3　　　　C. 4　　　　D. 3

【答案】A

【解析】

【分析】根据向量垂直列方程，化简求得 m 的值.

【详解】$2\vec{a}-\vec{b}=(2m,4)-(1,1)=(2m-1,3)$，

由于 $(2\vec{a}-\vec{b})\perp\vec{c}$，

所以 $(2\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{c}=2m-1+9=2m+8=0, m=-4$.

故选：A

5. 若 $a=2^{0.1}$，$b=\ln\frac{1}{2}$，$c=\left(\frac{2}{3}\right)^{\pi}$，则（　　）

A. $c>a>b$　　　　B. $a>c>b$　　　　C. $c>b>a$　　　　D. $a>b>c$

【答案】B

【解析】

【分析】根据对数函数与指数函数的单调性比较函数值的大小即可.

【详解】因为 $2^{0.1}>2^{0}=1$，所以 $a>1$；又 $\ln\frac{1}{2}<\ln 1=0$，所以 $b<0$；又 $\left(\frac{2}{3}\right)^{\pi}<\left(\frac{2}{3}\right)^{0}=1$，所以 $0<c<1$，

故可得 $a>c>b$.

故选：B.

6. 已知双曲线 C：$x^2-y^2=2$，则 C 的焦点到其渐近线的距离为（　　）

A. $\sqrt{2}$　　　　B. $\sqrt{3}$　　　　C. 2　　　　D. 3

【答案】A

【解析】

【分析】求出双曲线的焦点坐标及渐近线方程，根据双曲线的对称性取其中一个焦点坐标和一条渐近线即可，根据点到直线的距离公式求出结果即可.

【详解】由题知双曲线 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$，

所以其焦点坐标为 $(\pm2,0)$，其渐近线方程为 $y=\pm x$，即 $y\pm x=0$，

又根据双曲线的对称性，

不妨取焦点$(2,0)$到渐近线方程为$y+x=0$的距离，

故C的焦点到其渐近线的距离为$d=\dfrac{2}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$.

故选：A.

7. 考查棉花种子经过处理跟生病之间的关系得到如表数据：

项目	种子处理	种子未处理	总计
得病	32	101	133
不得病	192	213	405
总计	224	314	538

根据以上数据，则（　　）

A. 种子是否经过处理决定是否生病

B. 种子是否经过处理跟是否生病无关

C. 种子是否经过处理跟是否生病有关

D. 以上都是错误的

【答案】C

【解析】

【分析】根据表格提供的数据作出判断.

【详解】由列联表中的数据可知，

种子经过处理，得病的比例明显降低，

种子未经过处理，得病的比例要高些，

所以可得结论：种子是否经过处理跟是否生病有关.

故选：C

8. 已知函数$f(x)=\cos\left(\omega x+\dfrac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$在区间$\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3}{4}\pi\right]$上单调递减，则实数$\omega$的取值范围为（　　）

A. $\left(0,\dfrac{8}{9}\right]$

B. $(1,2]$

C. $(0,1]$

D. $\left(0,\dfrac{2}{3}\right]$

【答案】A

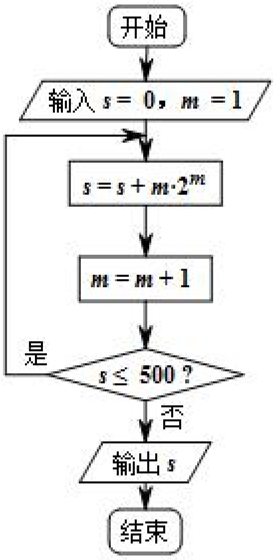
【解析】

【分析】先由周期大于等于单调区间的长度的2倍，求得ω的初步范围，然后结合余弦函数的单调性进一步确定ω的范围，得到答案.

【详解】由题意有$T=\dfrac{2\pi}{\omega}\geq\pi$，可得$0<\omega\leq 2$，又由$\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{\pi\omega}{4}+\dfrac{\pi}{3}\leq\dfrac{5\pi}{6}$，必有$\dfrac{3\pi\omega}{4}+\dfrac{\pi}{3}\leq\pi$，可得$0<\omega\leq\dfrac{8}{9}$.

故选：A

9. 执行如图所示程序框图，则输出的$s=$（　　）



A. 501　　B. 642　　C. 645　　D. 896

【答案】B

【解析】

【分析】根据框图，逐一写出各个循环的运算结果，直到 $s>500$，跳出循环，得到输出值.

【详解】$s=0,m=1$;

$s=0+1\times 2^1=2$，$m=1+1=2,s\leq 500$;

$s=2+2\times 2^2=10$，$m=2+1=3,s\leq 500$;

$s=10+3\times 2^3=34,m=3+1=4, s\leq 500$;

$s=34+4\times 2^4=98,m=4+1=5, s\leq 500$;

$s=98+5\times 2^5=258,m=5+1=6, s\leq 500$;

$s=258+6\times 2^6=642$，$m=6+1=7, s>500$;

结束循环，输出 $s=642$.

故选:B.

【点睛】本题考查程序框图的输入输出值的确定，涉及循环结构，根据程序逐行模拟运算即得.

10. 在 $\begin{cases}2x-y-6\leq 0\\ x-y+2\geq 0\\ x+y\geq 2\end{cases}$ 的条件下，目标函数 $z=mx+ny\left(m>0,n>0\right)$ 的最大值为 10，则 $\dfrac{1}{m}+\dfrac{2}{n}$ 的最小值是（　　）

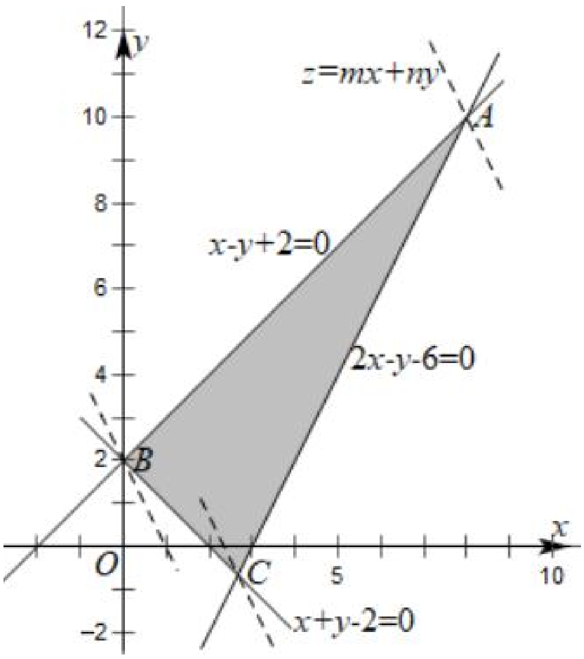
A. $2\sqrt{10}$　　B. $\dfrac{14+2\sqrt{10}}{5}$　　C. $\dfrac{8\sqrt{10}}{5}$　　D. $\dfrac{14+4\sqrt{10}}{5}$

【答案】D

【解析】

【分析】作出不等式组所表示的可行域，平移直线 $z=mx+ny\left(m>0,n>0\right)$，找出使得 $z=mx+ny$ 取得最大值时的最优解，代入目标函数可得 $4m+5n=5$，然后利用基本不等式可求得 $\dfrac{1}{m}+\dfrac{2}{n}$ 的最小值.

【详解】不等式组$\begin{cases}2x-y-6\le 0\\ x-y+2\ge 0\\ x+y\ge 2\end{cases}$所表示的可行域如下图所示：



联立$\begin{cases}x-y+2=0\\ 2x-y-6=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=8\\ y=10\end{cases}$，可得点$A(8,10)$，

平移直线$z=mx+ny\left(m>0,n>0\right)$，当直线$z=mx+ny$经过可行域的顶点 A 时，该直线在$x$轴上的截距最大，

此时，z取最大值，即$z_{\max}=8m+10n=10$，可得$4m+5n=5$，

$\because 5\left(\dfrac{1}{m}+\dfrac{2}{n}\right)=\left(4m+5n\right)\left(\dfrac{1}{m}+\dfrac{2}{n}\right)=14+\dfrac{5n}{m}+\dfrac{8m}{n}\ge 14+2\sqrt{\dfrac{5n}{m}\cdot\dfrac{8m}{n}}=14+4\sqrt{10}$，

$\therefore \dfrac{1}{m}+\dfrac{2}{n}\ge\dfrac{14+4\sqrt{10}}{5}$，当且仅当$\sqrt{5}n=2\sqrt{2}m$时，等号成立.

因此，$\dfrac{1}{m}+\dfrac{2}{n}$的最小值为$\dfrac{14+4\sqrt{10}}{5}$.

故选：D.

【点睛】本题考查利用线性规划求参数，同时也考查了利用基本不等式求代数式的最值，考查数形结合思想的应用以及计算能力，属于中等题.

11. 已知在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AB=BC=2$，$AC=2\sqrt{3}$，若该棱柱的外接球的表面积为32π，则三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的体积为（　　）

A. 4　　　　B. $4\sqrt{3}$　　　　C. 8　　　　D. $6\sqrt{3}$

【答案】B

【解析】

【分析】利用正弦定理，可求解$\triangle ABC$外接圆的半径r，利用外接球的表面积，可得外接球的半径R，借助勾股定理$R^2=r^2+(\dfrac{AA_1}{2})^2$，可得$AA_1=4$，利用三棱柱体积公式，即得解

【详解】在 $\triangle ABC$ 中，$AB=BC=2$，$AC=2\sqrt{3}$，所以 $\angle ABC=120^\circ$，

则其外接圆的半径 $r=\dfrac{2\sqrt{3}}{2\sin120^\circ}=2$，

因为外接球的表面积为 32π，所以外接球的半径 $R=2\sqrt{2}$，

由 $R^2=r^2+(\dfrac{AA_1}{2})^2$，得 $AA_1=4$.

则 $V=Sh=(\dfrac{1}{2}\times2\times2\times\sin120^\circ)\times4=4\sqrt{3}$.

故选：B

12. 已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}2^{|x|}+1,x\le0\\ \left|\log_2 x\right|,x>0\end{cases}$，若关于 x 的方程 $f^2\left(x\right)+\sqrt{2}m=\left(m+\sqrt{2}\right)f\left(x\right)$ 恰有 5 个不同的实根，则 m 的取值范围为（　　）

A. $\left(0,1\right)$　　B. $\left(1,+\infty\right)$　　C. $\left[1,2\right)$　　D. $\left[2,+\infty\right)$

【答案】D

【解析】

【分析】根据所给方程，求出 $f(x)=\sqrt{2}$，$f(x)=m$，根据关于 x 的方程恰有 5 个不同的实根，借助于图像可知 m 的取值范围.

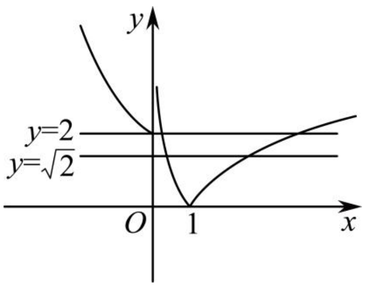
【详解】$\because f^2\left(x\right)+\sqrt{2}m=\left(m+\sqrt{2}\right)f\left(x\right)$，

$f^2\left(x\right)-\left(m+\sqrt{2}\right)f\left(x\right)+\sqrt{2}m=0$，

$\left(f(x)-\sqrt{2}\right)\left(f(x)-m\right)=0$，

$\therefore f(x)=\sqrt{2}$ 或 $f(x)=m$.

作出函数 $f(x)$ 的图像如图所示，



由图知 $f(x)$ 的图像与 $y=\sqrt{2}$ 有两个交点，

若关于 x 的方程 $f^2\left(x\right)+\sqrt{2}m=\left(m+\sqrt{2}\right)f\left(x\right)$ 恰有 5 个不同的实根，则 $f(x)$ 的图像与 $y=m$ 有三个公共点，所以 m 的取值范围 $\left[2,+\infty\right)$.

故选：D.

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 人体的正常温度大约是36℃，当人体温度超过正常温度的$\frac{13}{12}$时认定为高烧，则高烧温度t℃应满足的不等关系式是________.

【答案】$t>39$

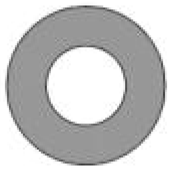
【解析】

【分析】根据题目所给已知条件列出不等关系式.

【详解】依题意，$t>36\times\frac{13}{12}=39$.

故答案为：$t>39$

14. 如图两个同心圆，大圆的半径是小圆半径的两倍，在大圆内随机取一点，则此点取自阴影部分的概率是________.



【答案】$\frac{1}{4}$## 0.25

【解析】

【分析】先分别求解两个圆的面积，利用几何概型可得概率.

【详解】设小圆半径为r，则大圆半径为$2r$，

小圆的面积为πr^2，大圆的面积为$4\pi r^2$，

所以在大圆内随机取一点，则此点取自阴影部分的概率是$p=\frac{\pi r^2}{4\pi r^2}=\frac{1}{4}$.

故答案为：$\frac{1}{4}$.

15. 在$\triangle ABC$中，角A，B，C的对边a，b，c为三个连续偶数，且$C=2A$，则$a=$______.

【答案】8

【解析】

【分析】

根据大边对大角，可得$a<c$，可设$a=2n-2,b=2n,c=2n+2$,由已知条件，利用正弦的二倍角公式和正余弦定理得到关于n的方程求解即可.

【详解】由题意可得$A<C$,$\therefore a<c$,又$\because$角A，B，C的对边a，b，c为三个连续偶数，

故可设$a=2n-2,b=2n,c=2n+2,$

由$C=2A,\therefore \sin C=\sin 2A,\therefore \sin C=2\sin A\cos A,$

$\because \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$,$\therefore \cos A=\frac{\sin C}{2\sin A}=\frac{c}{2a}=\frac{n+1}{2(n-1)}$,

由余弦定理得$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{4n^2+4(n+1)^2-4(n-1)^2}{2(2n)(2n+2)}=\frac{n^2+4n}{2n(n+1)}=\frac{n+4}{2(n+1)}$.

所以$\dfrac{n+1}{2(n-1)}=\dfrac{n+4}{2(n+1)}$,即$(n+1)^2=(n-1)(n+4)$,

解得$n=5$,故$a=2n-2=8$.

故答案为：8.

【点睛】本题考查正余弦定理在解三角形中的综合运用，关键是熟练使用二倍角公式，正弦定理角化边，正余弦定理联立得到方程求解.

16. 椭圆C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左，右焦点分别为$F_1$，$F_2$，上顶点为$A(0,1)$，离心率为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，直线$y=kx+m(k>0)$将$\triangle AF_1F_2$分成面积相等的两部分，则$m$的取值范围是________.

【答案】$\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$

【解析】

【分析】根据已知条件求得a,b，根据直线$y=kx+m(k>0)$与x轴的交点的位置进行分类讨论，由此列不等式来求得m的取值范围.

【详解】依题意，$\begin{cases}b=1\\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$，解得$a=\sqrt{2},c=1$，

所以椭圆C的方程为$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，

由于$|OA|=|OF_1|=|OF_2|=1$，$|AF_1|=|AF_2|=\sqrt{2},|F_1F_2|=2$，

所以$\triangle AF_1F_2$是等腰直角三角形，

所以$S_{\triangle AF_1F_2}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=1$，

直线AF_2的方程为$x+y=1$，直线AF_1的方程为$y=x+1$，

设直线$y=kx+m(k>0)$与AF_2的交点为D，与x轴的交点为E，

①当E与F_1重合时，$\dfrac{1}{2}\times2\times y_D=\dfrac{1}{2}\times1,y_D=\dfrac{1}{2}$，则$x_D=\dfrac{1}{2}$，

所以$\begin{cases}0=-k+m\\ \dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}k+m\end{cases}$，解得$k=m=\dfrac{1}{3}$.

②当E在O，F_1之间时，$\dfrac{1}{3}<m<1$，

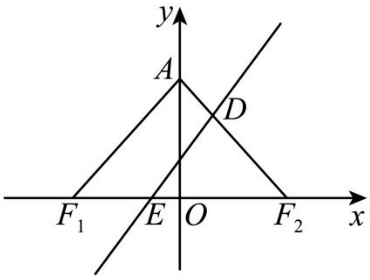
所以$\dfrac{1}{2}\times|EF_2|\times y_D=\dfrac{1}{2}\times1,|EF_2|\times y_D=1$，

由$\begin{cases}x+y=1\\y=kx+m\end{cases}$解得$y_D=\dfrac{k+m}{1+k}$，$x_D=1-\dfrac{k+m}{1+k}=\dfrac{1-m}{1+k}$，

由$y=kx+m$令$y=0$，得$x_E=-\dfrac{m}{k}$，

所以$\left|EF_2\right|=1+\dfrac{m}{k}$，所以$\left(1+\dfrac{m}{k}\right)\times\dfrac{k+m}{1+k}=1$，

整理得$k=\dfrac{m^2}{1-2m}$，由$k=\dfrac{m^2}{1-2m}>0$解得$\dfrac{1}{3}<m<\dfrac{1}{2}$.



③当E在F_1左侧，则$0<m<\dfrac{1}{3},0<k<1$，$0<\left|k^2-1\right|<1$，

设直线$y=kx+m\left(k>0\right)$与AF_1的交点为P，

由$\begin{cases}y=kx+m\\y=x+1\end{cases}$解得$x_P=\dfrac{1-m}{k-1},y_P=\dfrac{k-m}{k-1}$，

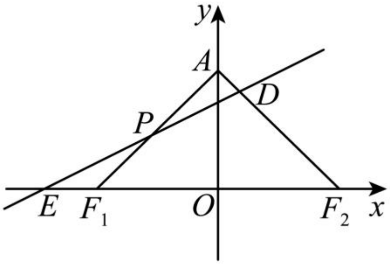
因为$S_{\triangle PAD}=\dfrac{1}{2}\times1=\dfrac{1}{2}$，

所以$\dfrac{1}{2}\times(1-m)\times\left|x_D-x_P\right|=\dfrac{1}{2},(1-m)\times\left|\dfrac{1-m}{1+k}-\dfrac{1-m}{k-1}\right|=1$，

$2\left(1-m\right)^2=\left|k^2-1\right|$，所以$\sqrt{2}\left(1-m\right)=\sqrt{\left|k^2-1\right|}<1$，

所以$1-m<\dfrac{\sqrt{2}}{2},m>1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

所以$1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<m<\dfrac{1}{3}$.



综上所述，m的取值范围是$\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$.

故答案为：$\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$

【点睛】求解椭圆的方程，关键点是根据已知条件求得a,b,c，a,b,c是3个未知数，需要3个条件，其中一个条件是$a^2=b^2+c^2$，另外的两个条件由题目给出，如本题中的A点坐标以及离心率，通过解方程组可求得a,b,c，进而求得椭圆的方程.

三、解答题：共70分.解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.第17~21题为必考题，每个试题考生都必须作答.第22、23题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共60分.

17. 设$\{a_n\}$是正项等差数列，$a_3=3$，且a_2,a_5-1,a_6+2成等比数列.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）记$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$b_n=\dfrac{1}{S_n}$，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n.

【答案】（1）$a_n=n$

（2）$T_n=\dfrac{2n}{n+1}$

【解析】

【分析】（1）根据题意列式求解a_1,d，即可得结果；

（2）由（1）求S_n,b_n，再根据裂项相消法求和.

【小问1详解】

设正项等差数列$\{a_n\}$的公差为d，则$a_1>0,d>0$，

由题意，可得$\begin{cases}a_3=3\\(a_5-1)^2=a_2(a_6+2)\end{cases}$，即$\begin{cases}a_1+2d=3\\(a_1+4d-1)^2=(a_1+d)(a_1+5d+2)\end{cases}$，

解得$\begin{cases}a_1=1\\d=1\end{cases}$或$\begin{cases}a_1=\dfrac{43}{7}\\d=-\dfrac{11}{7}\end{cases}$（舍去），

故$a_n=1+n-1=n$.

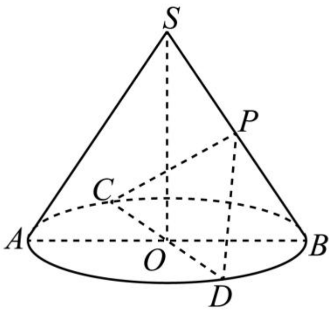
【小问2详解】

由（1），可得$a_n=n,S_n=\dfrac{n(1+n)}{2}$，则$b_n=\dfrac{1}{S_n}=\dfrac{2}{n(n+1)}=2\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$，

故$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=2\left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)=2\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{2n}{n+1}$，

即$T_n=\dfrac{2n}{n+1}$.

18. 如图，圆锥SO的侧面展开图是半径为2的半圆，AB，CD为底面圆的两条直径，P为SB的中点.



（1）求证：$SA//$ 平面 PCD；

（2）当 $S-PCD$ 体积最大时，求 S 到平面 PCD 的距离.

【答案】（1）证明见解析

（2）$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

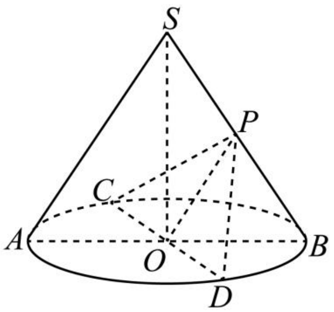
【解析】

【分析】（1）连接 OP，利用中位线定理可证 OP // SA，由线面平行的判定定理证明即可；

（2）由题意 $CD\perp AB$，建立空间直角坐标系，利用向量求解点到平面距离.

【小问 1 详解】

证明：连接 OP，如图所示，



因为 O 为 AB 的中点，P 为 SB 的中点，

则 $OP//SA$，又 $OP\subset$ 平面 PCD，$SA\not\subset$ 平面 PCD，

所以 $SA//$ 平面 PCD.

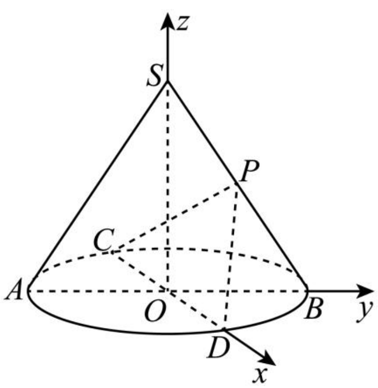
【小问 2 详解】

记底面圆半径为 r，侧面展开图半径为 R，则 $R=2$，

又 $\pi R=2\pi r$，所以 $r=1$，$OS=\sqrt{3}$，

当 $S-PCD$ 体积最大时，$CD\perp AB$，

以 O 为原点，OD，OB，OS 为 x，y，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，



所以$O(0,0,0)$，$D(1,0,0)$，$P\left(0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$S(0,0,\sqrt{3})$，

$\overrightarrow{SP}=\left(0,\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ，$\overrightarrow{OD}=(1,0,0)$ ，$\overrightarrow{OP}=\left(0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ，

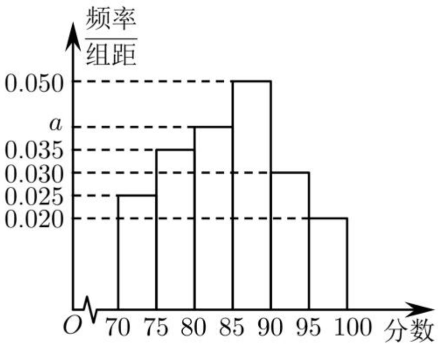
设平面 PCD 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$ ，

因为 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{OD}=x=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{2}z=0\end{cases}$，令 $z=1$，$x=0$，$y=-\sqrt{3}$，

所以 $\vec{n}=(0,-\sqrt{3},1)$，$\vec{n}\cdot\overrightarrow{SP}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}$，

所以点 S 到平面 PCD 的距离 $d=\frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{SP}|}{|\vec{n}|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

19. 2002 年 8 月国家通过修订《中华人民共和国水法》来保护水资源，加强人们保护水资源，防治水污染，节约用水等意识.小明为了了解本市市民保护水资源，节约用水意识是否落地，随机抽取了 300 名市民进行节约用水调查评分，将得到的分数分成 6 组：$[70,75)$，$[75,80)$，$[80,85)$，$[85,90)$，$[90,95)$，$[95,100]$，得到如图所示的频率分布直方图.



（1）求 a 的值，并估计这 300 名市民评分的中位数；

（2）若先用分层抽样的方法从评分在 $[90,95)$ 和 $[95,100]$ 的市民中抽取 5 人，然后再从抽出的这 5 位市民中任意选取 2 人作进一步访谈：

①写出这个试验的样本空间；

②求这 2 人中至少有 1 人的评分在 $[95,100]$ 的概率.

【答案】（1）$a=0.04$，中位数是 85

（2）①详见解析；②$\frac{7}{10}$

【解析】

【分析】（1）根据频率之和为 1 求得 a，根据中位数的求法求得中位数.

（2）①先根据分层抽样的知识求得每组抽取的人数，然后利用列举法求得样本空间.

②根据古典概型概率计算公式求得这 2 人中至少有 1 人的评分在 $[95,100]$ 的概率.

【小问 1 详解】

依题意，$\left(0.025+0.035+a+0.05+0.03+0.02\right)\times5=1$，

解得 $a=0.04$.

$\left(0.025+0.035+0.04\right)\times5=0.5$，故中位数是 85、

【小问 2 详解】

①$\left[90,95\right)$ 的频率为 $0.03\times5=0.15$，$\left[95,100\right)$ 的频率为 $0.02\times5=0.1$，

所以在 $\left[90,95\right)$ 的市民中抽取 $5\times\dfrac{0.15}{0.15+0.1}=3$ 人，记为 $1,2,3$，

在 $\left[95,100\right]$ 的市民中抽取 $5\times\dfrac{0.1}{0.15+0.1}=2$ 人，记为 $4,5$，

从中抽取 2 人 ，

样本空间为 $\left\{\left\{1,2\right\},\left\{1,3\right\},\left\{1,4\right\},\left\{1,5\right\},\left\{2,3\right\},\left\{2,4\right\},\left\{2,5\right\},\left\{3,4\right\},\left\{3,5\right\},\left\{4,5\right\}\right\}$.

②这 2 人中至少有 1 人的评分在 $\left[95,100\right]$ 的包含 7 个基本事件，

即 $\left\{1,4\right\},\left\{1,5\right\},\left\{2,4\right\},\left\{2,5\right\},\left\{3,4\right\},\left\{3,5\right\},\left\{4,5\right\}$，

所以这 2 人中至少有 1 人的评分在 $\left[95,100\right]$ 的概率为 $\dfrac{7}{10}$.

20. 已知函数 $f\left(x\right)=\ln x-a\left(x-1\right)$.

（1）当 $a=1$ 时，讨论 $f\left(x\right)$ 的单调性；

（2）若 $f\left(x\right)$ 有两个零点，求 a 的取值范围.

【答案】（1）$f\left(x\right)$ 在 $\left(0,1\right)$ 单调递增，在 $\left(1,+\infty\right)$ 单调递减

（2）$a\in\left(0,1\right)\cup\left(1,+\infty\right)$

【解析】

【分析】（1）对 $f\left(x\right)$ 求导，利用导数的几何意义，分析导函数的符号即可；

（2）利用导函数研究 $f\left(x\right)$ 单调性，结合零点存在性定理求解即可.

【小问 1 详解】

当 $a=1$，$f\left(x\right)=\ln x-x+1\left(x>0\right)$，则 $f'\left(x\right)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$，

令 $f'(x)>0$ 解得 $0<x<1$，令 $f'\left(x\right)<0$ 解得 $x>1$，

所以 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,1\right)$ 单调递增，在 $\left(1,+\infty\right)$ 单调递减.

【小问 2 详解】

由题意可得 $x>0$，$f'\left(x\right)=\dfrac{1}{x}-a=\dfrac{1-ax}{x}$，

当 $a\le0$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，$f\left(x\right)$ 单调递增，故至多有一个零点，不符合题意，

所以$a>0$，由$f'(x)>0$解得$0<x<\dfrac{1}{a}$，由$f'(x)<0$解得$x>\dfrac{1}{a}$，

所以$f(x)$在$\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$单调递增，在$\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$单调递减，

所以由零点存在性定理可得若$f(x)$有两个零点，则$f\left(\dfrac{1}{a}\right)=\ln\dfrac{1}{a}-a\left(\dfrac{1}{a}-1\right)>0$，即$\ln a-a+1<0$，

令$g(a)=\ln a-a+1$，由（1）得$g(a)$在$(0,1)$单调递增，在$(1,+\infty)$单调递减，

又$g(1)=0$，所以由$g(a)<0$解得$a\in(0,1)\cup(1,+\infty)$，

因为$f\left(\mathrm{e}^{-a}\right)=\ln\mathrm{e}^{-a}-a\left(\mathrm{e}^{-a}-1\right)=-a\mathrm{e}^{-a}<0$，

所以由$f\left(\mathrm{e}^{-a}\right)f\left(\dfrac{1}{a}\right)<0$的在$\mathrm{e}^{-a}$和$\dfrac{1}{a}$之间存在一个零点，又$f(1)=0$，

所以a的取值范围为$(0,1)\cup(1,+\infty)$.

21. 已知点F为抛物线E：$y^2=2px$（$p>0$）的焦点，点P（-3，2），$|PF|=2\sqrt{5}$，若过点P作直线与抛物线E顺次交于A，B两点，过点A作斜率为1的直线与抛物线的另一个交点为点C.

（1）求抛物线E的标准方程；

（2）求证：直线BC过定点；

（3）若直线BC所过定点为点Q，$\triangle QAB$，$\triangle PBC$的面积分别为S_1，S_2，求$\dfrac{S_1}{S_2}$的取值范围

【答案】（1）$y^2=4x$

（2）证明见解析　　（3）$(0,1)$

【解析】

【分析】（1）利用$F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$表示出$|FP|$，化简即可求出答案.

（2）设出直线AB，联立直线AB与抛物线E，利用韦达定理则可表示出A、B两点的关系.再由点A写出直线AC，联立直线AC与抛物线E，利用韦达定理则可表示出A、C两点的关系.写出直线BC的方程，根据两个关系式消掉A点，则可得出结论.

（3）将S_1、S_2用A、B、C点表示出来，再利用韦达定理用直线AB的斜率k表示出$\dfrac{S_1}{S_2}$，最后化简即可得出答案.

【小问1详解】

焦点$F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$，$|FP|=\sqrt{\left(-3-\dfrac{p}{2}\right)^2+4}=2\sqrt{5}$，$\because p>0$，$\therefore p=2$

抛物线E的标准方程为$y^2=4x$

【小问2详解】

显然．直线AB斜率存在，设AB的方程为$y-2=k(x+3)$

由$\begin{cases} y-2=k(x+3) \\ y^2=4x \end{cases}$，化简得：$ky^2-4y+8+12k=0, k\neq 0, \Delta=16\left(-3k^2-2k+1\right)>0$，

设$A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$，则$y_1+y_2=\dfrac{4}{k}, y_1y_2=\dfrac{8}{k}+12$，

$\therefore y_1y_2-12=2\left(y_1+y_2\right)$　　①

直线AC的方程为$y-y_1=x-\dfrac{y_1^2}{4}$，

由$\begin{cases} y-y_1=x-\dfrac{y_1^2}{4} \\ y^2=4x \end{cases}$化简得：$y^2-4y+4y_1-y_1^2=0, \Delta=16-4\left(4y_1-y_1^2\right)>0$，

设$C\left(x_3,y_3\right)$则$y_1+y_3=4$　　②

由①②得$\left(4-y_3\right)y_2-12=2\left(4-y_3+y_2\right)$，$\therefore 2\left(y_2+y_3\right)=y_2y_3+20$　　③

（ⅰ）若直线BC没有斜率，则$y_2+y_3=0$，又$2\left(y_2+y_3\right)=y_2y_3+20$，$\therefore y_3^{\ 2}=20$，$\therefore x_3=\dfrac{y_3^{\ 2}}{4}=5$，

$\therefore BC$的方程为$x=5$.

（ⅱ）若直线BC有斜率，为$\dfrac{y_2-y_3}{x_2-x_3}=\dfrac{4}{y_2+y_3}$，

直线BC的方程为$y-y_2=\dfrac{4}{y_2+y_3}\left(x-\dfrac{y_2^2}{4}\right)$，即$4x-\left(y_2+y_3\right)y+y_2y_3=0$，

将③代入得$4x-\left(y_2+y_3\right)y+2\left(y_2+y_3\right)-20=0$，$\therefore \left(y_2+y_3\right)(2-y)+4(x-5)=0$，

故直线BC有斜率时过点$(5,2)$.

由（ⅰ）（ⅱ）知，直线BC过点$(5,2)$.

【小问 3 详解】

$S_1=S_{\triangle PBQ}-S_{\triangle PAQ}=\dfrac{1}{2}|PQ|\cdot|y_1-2|-\dfrac{1}{2}|PQ|\cdot|y_2-2|=\dfrac{1}{2}|PQ|\cdot|y_1-y_2|$

$=\dfrac{1}{2}\times 8\times\left|y_1-y_2\right|=4\left|y_1-y_2\right|$

$S_2=\dfrac{1}{2}|PQ|\cdot\left|y_2-y_3\right|=\dfrac{1}{2}\times 8\times\left|y_2-y_3\right|=4\left|y_2-y_3\right|=4\left|y_1+y_2-4\right|$

由（2）得$y_1+y_2=\dfrac{4}{k}, y_1y_2=\dfrac{8}{k}+12$，$\left|y_1-y_2\right|=\sqrt{\dfrac{16}{k^2}-\dfrac{32}{k}-48}=\dfrac{4\sqrt{-3k^2-2k+1}}{|k|}$

$k\neq 0, \Delta=16\left(-3k^2-2k+1\right)>0$，$\therefore -1<k<\dfrac{1}{3}$，且$k\neq 0$，

$\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{\left|y_1-y_2\right|}{\left|y_1+y_2-4\right|}=\dfrac{4\sqrt{-3k^2-2k+1}}{|k|\cdot\left|\dfrac{4}{k}-4\right|}=\dfrac{\sqrt{-3k^2-2k+1}}{|k-1|}$

设$k-1=u,t=\dfrac{1}{u}$，

$$\frac{S_1}{S_2}=\sqrt{\frac{-(u+2)(3u+2)}{u^2}}=\sqrt{-\frac{3u^2+8u+4}{u^2}}=\sqrt{-4t^2-8t-3}=\sqrt{-4(t+1)^2+1}$$

$\because -1<k<\dfrac{1}{3}$，且$k\neq 0$，$\therefore t\in\left(-\dfrac{3}{2},-1\right)\cup\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right)\therefore\sqrt{-4(t+1)^2+1}\in(0,1)$，

故$\dfrac{S_1}{S_2}$的取值范围是$(0,1)$.

【点睛】本题考查抛物线的标准方程、直线过定点.属于难题.其中证明直线过定点，寻找坐标之间的关系进行消元是解题的关键.

（二）选考题：共10分.请考生在第22、23题中任选一道作答.如果多做，则按所做的第一题计分.

选修4-4：坐标系与参数方程

22. 在直角坐标系xOy中，曲线C的参数方程为$\begin{cases}x=1+2\cos\varphi,\\ y=\sqrt{3}+2\sin\varphi\end{cases}$($\varphi$为参数)，以原点为极点，$x$轴的正半轴为极轴建立极坐标系，射线$l_1$的极坐标方程为$\theta=\alpha$($0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$)，射线$l_2$的极坐标方程为$\theta=\alpha+\dfrac{\pi}{2}$.

（1）指出曲线C的曲线类型，并求其极坐标方程；

（2）若射线l_1与曲线C交于O，A两点，射线l_2与曲线C交于O，B两点，求$\triangle OAB$的面积的取值范围.

【答案】(1) 曲线C是以$\left(1,\sqrt{3}\right)$为圆心，2为半径的圆，曲线C的极坐标方程为$\rho=2\cos\theta+2\sqrt{3}\sin\theta$；(2) $(2,4]$.

【解析】

【分析】(1) 利用同角三角函数的平方关系消参得到普通方程，得到曲线类型，并利用极直互化公式化为极坐标方程；

(2) 利用极坐标方程，根据极径的意义求得$|OA|,|OB|$关于α的三角函数表达式，利用三角形的面积公式求得面积关于α的三角函数表达式，并化简为一角一函的形式，然后利用三角函数的性质求得取值范围.

【详解】(1) 曲线C的普通方程为$(x-1)^2+\left(y-\sqrt{3}\right)^2=4$，

所以曲线C是以$\left(1,\sqrt{3}\right)$为圆心，2为半径的圆，

其方程可化为$x^2+y^2=2x+2\sqrt{3}y$，

所以曲线C的极坐标方程为$\rho=2\cos\theta+2\sqrt{3}\sin\theta$.

(2) 设$|OA|=\rho_1=2\cos\alpha+2\sqrt{3}\sin\alpha$，

$$|OB|=\rho_2=2\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)+2\sqrt{3}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=2\sqrt{3}\cos\alpha-2\sin\alpha.$$

所以$S_{\triangle OAB}=\dfrac{1}{2}|OA||OB|=\dfrac{1}{2}\left(2\cos\alpha+2\sqrt{3}\sin\alpha\right)\left(2\sqrt{3}\cos\alpha-2\sin\alpha\right)$

$=2\sqrt{3}\cos 2\alpha+2\sin 2\alpha=4\sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

当 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$ 时，$\dfrac{\pi}{3}<2\alpha+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{5\pi}{6}$，所以 $\sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)\in\left(\dfrac{1}{2},1\right]$，

所以 $\triangle OAB$ 的面积的取值范围是 $(2,4]$.

选修 4-5：不等式选讲

23. 已知函数 $f(x)=|x+2|+\lambda|x-2|$.

（1）当 $\lambda=3$ 时，解不等式 $f(x)>6$；

（2）若不等式 $f(x)\le -\lambda|x+6|$ 恒成立，求 λ 的最大值.

【答案】（1）$(-\infty,1)\cup\left(\dfrac{5}{2},+\infty\right)$；（2）最大值为 $-\dfrac{1}{2}$.

【解析】

【分析】（1）利用绝对值的性质将函数 $f(x)$ 写成分段表达式，然后分段求解不等式，再求并集得到不等式的解集.

（2）分离参数后，利用绝对值三角形不等式的性质求得相应最小值，即得λ的最大值.

【详解】（1）当 $\lambda=3$ 时，$f(x)=|x+2|+3|x-2|=\begin{cases}4-4x, x\le -2,\\ 8-2x, -2<x\le 2,\\ 4x-4, x>2.\end{cases}$

当 $x\le -2$ 时，$f(x)=4-4x\ge 12$，原不等式恒成立；

当 $-2<x\le 2$ 时，由 $8-2x>6$ 得 $x<1$，所以 $-2<x<1$；

当 $x>2$ 时，由 $4x-4>6$ 得 $x>\dfrac{5}{2}$.

综上所述，不等式 $f(x)>6$ 的解集为 $(-\infty,1)\cup\left(\dfrac{5}{2},+\infty\right)$.

（2）由 $f(x)\le -\lambda|x+6|$ 得 $\lambda(|x+6|+|x-2|)\le -|x+2|$，

所以 $\lambda\le -\dfrac{|x+2|}{|x+6|+|x-2|}$.

由 $|x+6|+|x-2|\ge 2|x+2|$ 得 $-\dfrac{|x+2|}{|x+6|+|x-2|}\ge -\dfrac{1}{2}$，

当 $x\ge 2$ 或 $x\le -6$ 时等号成立.

因此，λ 的最大值为 $-\dfrac{1}{2}$.