2022 北京海淀高三（上）期中

数　　学

2022．11

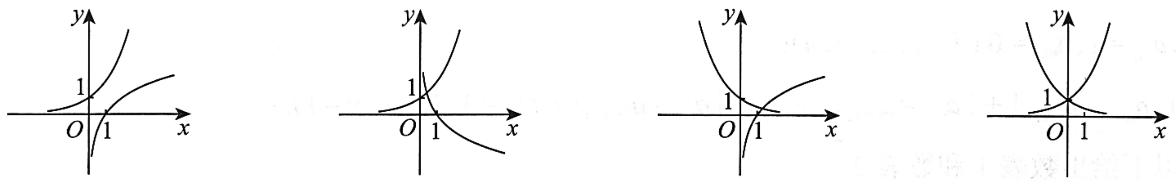
一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

（1）已知全集$U=\{x|x>0\}$，集合$A=\{x|2\le x\le 3\}$，则$\complement_U A=$（　）

（A）$(0,2]\cup[3,+\infty)$　　（B）$(0,2)\cup(3,+\infty)$

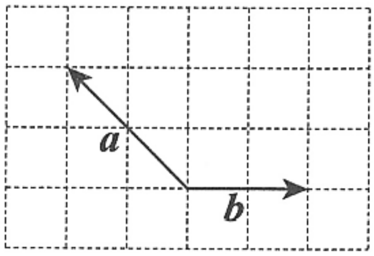
（C）$(-\infty,2]\cup[3,+\infty)$　　（D）$(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$

（2）在同一个坐标系中，函数$y=\log_a x$与$y=a^x$ $(a>0$ 且 $a\ne 1)$ 的图象可能是（　）



（A）　　（B）　　（C）　　（D）

（3）已知向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$在正方形网格中的位置如图所示．若网格中每个小正方形的边长均为 1，则$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$（　）



A．4　　B．$4\sqrt{2}$

C．-4　　D．$-4\sqrt{2}$

（4）若等差数列$\{a_n\}$和等比数列$\{b_n\}$满足$a_1=b_1$，$a_2=b_2=2$，$a_4=8$，则$\{b_n\}$的公比为（　）

（A）2　　（B）-2　　（C）4　　（D）-4

（5）已知实数a,b满足$a>b$，则下列不等式中正确的是（　）

（A）$|a|>b$　　（B）$a>|b|$　　（C）$a^2>ab$　　（D）$ab>b^2$

（6）在平面直角坐标系xOy中，角α与角β均以Ox为始边，它们的终边关于直线$y=x$对称．若$\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，则$\cos\beta=$（　）

（A）$-\dfrac{4}{5}$　　（B）$\dfrac{4}{5}$　　（C）$-\dfrac{3}{5}$　　（D）$\dfrac{3}{5}$

（7）已知函数$f(x)$．甲同学将$f(x)$的图象向上平移 1 个单位长度，得到图象C_1；乙同学将$f(x)$的图象上所有点的横坐标变为原来的$\dfrac{1}{2}$（纵坐标不变），得到图象C_2．若C_1与C_2恰好重合，则下列给出的$f(x)$中符合题意的是（　）

（A）$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}x$　　（B）$f(x)=\log_2 x$　　（C）$f(x)=2^x$　　（D）$f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

（8）已知函数 $f(x)=a\mathrm{e}^{x}+b\mathrm{e}^{-x}\ (ab\neq 0)$，则"$a+b=0$"是"$f(x)$ 为奇函数"的（　）

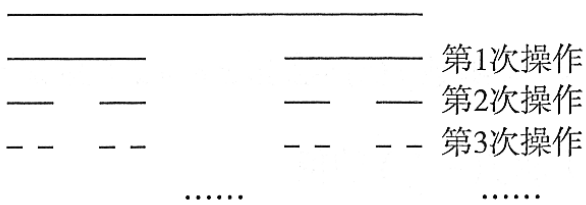
（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（9）若 P 是 ΔABC 内部或边上的一个动点，且 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，则 xy 的最大值是（　）

（A）$\dfrac{1}{4}$　　（B）$\dfrac{1}{2}$　　（C）1　　（D）2

（10）我们可以用下面的方法在线段上构造出一个特殊的点集：如图，取一条长度为 1 的线段，第 1 次操作，将该线段三等分，去掉中间一段，留下两段；第 2 次操作，将留下的两段分别三等分，各去掉中间一段，留下四段；按照这种规律一直操作下去．若经过 n 次这样的操作后，去掉的所有线段的长度总和大于 $\dfrac{99}{100}$，则 n 的最小值为（　）



（参考数据：$\lg 2\approx 0.301,\lg 3\approx 0.477$）

（A）9　　（B）10　　（C）11　　（D）12

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分．

（11）若复数 $z=1-2\mathrm{i}$，则 $|\bar{z}|=$____．

（12）函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}+\ln x$ 的定义域是____．

（13）已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,1)$，$\boldsymbol{b}=(x,tx+2)$．若存在实数 x，使得 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同，则 t 的一个取值为____．

（14）若函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$ 和 $g(x)=\cos^2(x+\varphi)-\sin^2(x+\varphi)$ 的图象的对称中心完全重合，则 $\omega=$____；$g\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=$____．

（15）已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+ax+1, & x\leq 1,\\ ax, & x>1.\end{cases}$

（1）当 $a=1$ 时，$f(x)$ 的极值点个数为____；

（2）若 $f(x)$ 恰有两个极值点，则 a 的取值范围是____．

三、解答题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程．

（16）（本小题 13 分）

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n\ (n=1,2,\cdots)$，且 $a_2=3$，$S_5=25$．

（Ⅰ）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）等比数列 $\{b_n\}$ 的首项为 1，公比为 q，在下列三个条件中选择一个，使得 $\{b_n\}$ 的每一项都是 $\{a_n\}$ 中的

项．若 $b_k = a_m\ (k,m\in\mathbf{N}^*)$，求 m．（用含 k 的式子表示）

条件①：$q=-1$；　　　　条件②：$q=2$；　　　　条件③：$q=3$．

注：如果选择的条件不符合要求，第（Ⅱ）问得 0 分．

（17）（本小题 14 分）

已知函数 $f(x)=2\sin x\cos x+2\cos^2 x-1$．

（Ⅰ）求 $f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$的值；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 的最小正周期；

（Ⅲ）求 $f(x)$ 在区间$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上的最大值和最小值．

（18）（本小题 14 分）

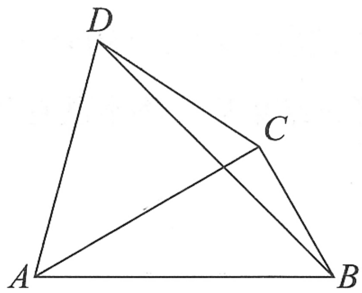
已知函值 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2$．

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）若 $f(x)$ 在区间 $(-1,m]$ 上的取值范围是$\left[-\dfrac{4}{3},0\right]$，求 m 的取值范围．

（19）（本小题 14 分）

某自然保护区为研究某动物种群的生活习性，设立了两个相距12 km 的观测站 A 和 B，观测人员分别在 A,B 处观测该动物种群，如图，某一时刻，该动物种群出现在点 C 处，观测人员从两个观测站分别测得 $\angle BAC=30^\circ$， $ABC=60^\circ$，经过一段时间后，该动物种群出现在点 D 处，观测人员从两个观测站分别测得 $\angle BAD=75^\circ$ $\angle ABD=45^\circ$．（注：点 A,B,C,D 在同一平面内）



（Ⅰ）求 ΔABD 的面积；

（Ⅱ）求点 C,D 之间的距离．

（20）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=e^x-a\sin x$．

（Ⅰ）当 $a=2$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）当 $a=1$ 时，证明：函数 $y=f(x)-2$ 在区间 $(0,\pi)$ 上有且仅有一个零点；

（Ⅲ）若对任意 $x\in[0,\pi]$，不等式 $f(x)\ge 2-\cos x$ 恒成立，求 a 的取值范围．

（21）（本小题 15 分）

对于一个 m 行 n 列的数表 $A_{m\times n}$ $(m\geq 2,n\geq 3)$，用 $a_{i,j}$ 表示数表中第 i 行第 j 列的数，$a_{i,j}\in\{0,1\}$ $(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$．对于给定的正整数 t，若数表 $A_{m\times n}$ 满足以下两个条件，则称数表 $A_{m\times n}$ 具有性质 $p(t)$：

① $a_{1,j}=1$，$a_{m,j}=0$ $(j=1,2,\cdots,n)$；

② $|a_{i,1}-a_{i+1,1}|+|a_{i,2}-a_{i+1,2}|+\cdots+|a_{i,n}-a_{i+1,n}|=t$ $(i=1,2,\cdots,m-1)$．

（Ⅰ）以下给出数表 1 和数表 2．

1	1	1
0	1	0
0	0	0

数表1

1	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
1	1	0	1
0	0	0	0

数表2

（ⅰ）数表 1 是否具有性质 $p(2)$？说明理由；

（ⅱ）是否存在正整数 t，使得数表 2 具有性质 $p(t)$？若存在，直接写出 t 的值，若不存在，说明理由；

（Ⅱ）是否存在数表 $A_{m\times 2023}$ 具有性质 $p(6)$？若存在，求出 m 的最小值，若不存在，说明理由；

（Ⅲ）给定偶数 n $(n>3)$，对每一个 $t\in\{2,3,\cdots,n-1\}$，将集合 $\{m|A_{m\times n}$ 具有性质 $p(t)\}$ 中的最小元素记为 $f(t)$．求 $f(t)$ 的最大值．

海淀区2022—2023学年第一学期期中练习

高三数学参考答案

一、选择题

题目	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	A	C	B	A	D	B	C	A	D

二、填空题

（11）$\sqrt{5}$　　（12）$(0,1)\cup(1,+\infty)$　　（13）答案不唯一，小于 1 的实数均可

（14）2；-1 或 1　　（15）2；$(0,2)$

三、解答题

（16）（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，

因为$a_2=3, S_5=25$，

所以$\begin{cases} a_1+d=3, \\ 5a_1+\dfrac{5\times4}{2}d=25. \end{cases}$

解得$\begin{cases} a_1=1, \\ d=2. \end{cases}$

所以$a_n=2n-1$.

（Ⅱ）选择条件③.

因为$b_1=1, q=3$，

所以$b_n=3^{n-1}$.

因为$a_m=b_k$，

即$2m-1=3^{k-1}$.

得$m=\dfrac{3^{k-1}+1}{2}$.

因为$k\in\mathbf{N}^*, 3^{k-1}$为奇数，$3^{k-1}+1$为偶数，

所以 $m\in\mathbf{N}^*$.

可得 $m=\dfrac{3^{k-1}+1}{2}$.

（17）（本小题 14 分）

解：（Ⅰ） $f(-\frac{\pi}{4})=2\sin(-\frac{\pi}{4})\cos(-\frac{\pi}{4})+2\cos^2(-\frac{\pi}{4})-1$

$=2(-\frac{\sqrt{2}}{2})\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+2(\frac{\sqrt{2}}{2})^2-1$

$=-1$.

（Ⅱ） $f(x)=\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})$.

所以 $f(x)$ 的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

（Ⅲ）因为 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$，所以 $\frac{\pi}{4}\le 2x+\frac{\pi}{4}\le\frac{5\pi}{4}$，

当 $2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{8}$ 时，$f(x)$ 取得最大值，

所以 $f(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的最大值为 $f(\frac{\pi}{8})=\sqrt{2}$；

当 $2x+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$，即 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)$ 取得最小值，

所以 $f(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的最小值为 $f(\frac{\pi}{2})=-1$.

（18）（本小题 14 分）

解：（Ⅰ） $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$.

$f'(x)=x^2-2x$，令 $f'(x)=0$，$x_1=0,x_2=2$.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

由表可得，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,0),(2,+\infty)$；单调递减区间为 $(0,2)$.

（Ⅱ）由函数解析式及（Ⅰ）可知 $f(-1)=-\frac{4}{3}, f(0)=0, f(2)=-\frac{4}{3}, f(3)=0$.

①当 $m\in(-1,2)$ 时，$\forall x\in(-1,m], f(x)\ne-\frac{4}{3}$，不符合题意；

②当 $m\in[2,3]$ 时，$f(x)$ 在区间 $[-1,m]$ 上的取值范围是 $[-\frac{4}{3},0]$，符合题意；

③当 $m>3$ 时，由 $f(x)$ 在区间 $(2,+\infty)$ 上单调递增可知 $f(m)>f(3)=0$，不符合题意.

综合上述，$m\in[2,3]$

（19）（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）在 $\triangle ABD$ 中，$\angle BAD=75^\circ$，$\angle ABD=45^\circ$,所以 $\angle ADB=60^\circ$.

由正弦定理：$\dfrac{AD}{\sin\angle ABD}=\dfrac{AB}{\sin\angle ADB}$，得 $\dfrac{AD}{\sin 45^\circ}=\dfrac{AB}{\sin 60^\circ}$，

所以， $AD=\dfrac{\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ}\cdot AB=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\times 12=4\sqrt{6}$ (km).

$\sin\angle BAD=\sin 75^\circ=\sin(45^\circ+30^\circ)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2})=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$,

所以$\triangle ABD$的面积为

$S_{\triangle ABD}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AD\cdot\sin\angle BAD=\dfrac{1}{2}\times 12\times 4\sqrt{6}\times\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=36+12\sqrt{3}$ (km^2).

（Ⅱ）由$\angle BAC=30^\circ$， $\angle ABC=60^\circ$，得$\angle CAD=45^\circ$, $AC=6\sqrt{3}$.

在$\triangle ACD$中由余弦定理，得

$CD^2=AC^2+AD^2-2AC\cdot AD\cdot\cos\angle CAD=36\times 3+16\times 6-2\times 6\sqrt{3}\times 4\sqrt{6}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=60$.

所以， $CD=2\sqrt{15}$ (km).

即点C, D之间的距离为$2\sqrt{15}$ km.

（20）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）当$a=2$时， $f(x)=e^x-2\sin x$，

则 $f(0)=1$.

$f'(x)=e^x-2\cos x$， 则 $f'(0)=-1$.

曲线 $f(x)$在$(0,f(0))$处的切线方程为$y=-x+1$.

（Ⅱ）当$a=1$时，记$g(x)=f(x)-2=e^x-\sin x-2$，

则 $g'(x)=e^x-\cos x$.

当$x\in(0,\pi)$时， $e^x>e^0=1, \cos x<1$,

所以$g'(x)>g'(0)=0$.

所以$g(x)$在$(0,\pi)$上单调递增.

因为$g(0)=-1<0, g(\pi)=e^\pi-2>0$,

所以函数$y=f(x)-2$在区间$(0,\pi)$上有且仅有一个零点.

（Ⅲ）设$h(x)=f(x)+\cos x-2=e^x-a\sin x+\cos x-2$.

则 $h'(x)=e^x-a\cos x-\sin x$.

设 $s(x)=e^x-a\cos x-\sin x$.

则 $s'(x)=e^x-\cos x+a\sin x$.

因为当 $x\in[0,\pi]$ 时， $e^x\geq e^0=1,\cos x\leqslant 1,\sin x\geqslant 0$,

所以当 $a\geq 0$ 时， $x\in[0,\pi]$ 时， $s'(x)\geq 0$ ，
所以 $h'(x)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上单调递增 $(*)$.

（1）当 $a>1$ 时， $h'(0)=1-a<0$ ， $h'(\pi)=e^{\pi}+a>0$,

且 $h'(x)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上单调递增，

所以存在唯一 $x_0\in(0,\pi)$ ，使得 $h'(x_0)=0$.

当 $x\in(0,x_0)$ 时， $h'(x)<0$ ，

所以 $h(x)$ 在区间 $(0,x_0)$ 上单调递减.

可得 $h(x_0)<h(0)=0$ ，所以与题意不符.

（2）当 $a=1$ 时,

$h(x)=e^x-\sin x+\cos x-2$.

$h'(x)=e^x-\cos x-\sin x$

由 $(*)$ 可知： $h'(x)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上单调递增,
所以当 $x\in[0,\pi]$ 时， $h'(x)\geq h'(0)=0$.
所以 $h(x)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上单调递增.
所以 $h(x)\geqslant h(0)=0$ 区间 $[0,\pi]$ 上恒成立.
符合题意.
（3）当 $a<1$ 时,

$h(x)=e^x-a\sin x+\cos x-2>e^x-\sin x+\cos x-2$.

由（2）可知，此时 $h(x)>0$ 在区间 $[0,\pi]$ 上恒成立.
综上所述，实数 a 的取值范围是 $(-\infty,1]$.
（21）（本小题 15 分）
解：（Ⅰ）（ⅰ）数表 1 不具有性质 $p(2)$.

理由： $|a_{2,1}-a_{3,1}|+|a_{2,2}-a_{3,2}|+|a_{2,3}-a_{3,3}|=1\neq 2$.

（ⅱ）存在. $t=3$ 时，数表 2 具有性质 $p(t)$.

（Ⅱ）不存在数表 $A_{m\times 2023}$ 具有性质 $p(6)$.

假设存在 m 使得数表 $A_{m\times 2023}$ 具有性质 $p(6)$ ，则

$$|a_{i,1}-a_{i+1,1}|+|a_{i,2}-a_{i+1,2}|+\cdots+|a_{i,n}-a_{i+1,n}|=6(i=1,2,\cdots,m-1).$$

即在这两行中，有 6 列的数不同，设其中有 k 列是第 i 行的数为 1，第 $i+1$ 行的数为 0，则有 $6-k$ 列是第 i 行的数为 0，第 $i+1$ 行的数为 1.
所以，从第 i 行到第 $i+1$ 行，一共增加了 $6-2k$ 个 1，1 的个数的奇偶性不变. ……7 分
所以，任意两行中，1 的个数的奇偶性相同.

与数表 $A_{m\times 2023}$ 第一行有 2023 个 1，最后一行有 0 个 1 矛盾.

所以，不存在具有性质 $p(6)$ 的数表 $A_{m\times 2023}$.

（Ⅲ） $f(t)$ 的最大值的为 $n+1$.

定义 $m-1$ 行 n 列的数表 $B_{(m-1)\times n}$：

其第 i 行第 j 列为 $b_{i,j}=|a_{i,j}-a_{i+1,j}|$，$i=1,2,\cdots,m-1$ $(j=1,2,\cdots,n)$.

则 $b_{i,j}\in\{0,1\}$，且 $b_{i,j}=0$ 表示 $a_{i,j},a_{i+1,j}$ 两数相同，$b_{i,j}=1$ 表示 $a_{i,j},a_{i+1,j}$ 两数不同.

因为数表 $A_{m\times n}$ 的第 1 行确定，所以给定数表 $B_{(m-1)\times n}$ 后，数表 $A_{m\times n}$ 唯一确定.

①先证 $f(t)\le n+1$.

我们按照如下方式，构造数表 $B_{n\times n}$：对于第 $2s-1$ 行和第 $2s$ 行，$s=1,2,\cdots,\frac{n}{2}$，

令 $b_{2s-1,2s-1}=1,b_{2s-1,2s}=0$，$b_{2s,2s-1}=0,b_{2s,2s}=1$，

且在这两行其余的 $n-2$ 列中，任选相同的 $t-1$ 列都为 1，其他列都为 0.

于是可得到具有性质 $p(t)$ 的数表 $A_{(n+1)\times n}$ 如下：

	第 1 列	第 2 列	第 3 列	第 4 列		第 n-1 列	第 n 列
第 1 行	1	1	1	1	…	1	1
第 3 行	0	0	1	1	…	1	1
第 5 行	0	0	0	0	…	1	1
…					…		
第 n+1 行	0	0	0	0	…	0	0

即对于每个 $t\in\{2,3,\cdots,n-1\}$，当 $m=n+1$ 时，都存在数表 $A_{m\times n}$ 具有性质 $p(t)$.

所以 $f(t)\le n+1$.

②再证 $t=n-1$ 时，$f(t)\ge n+1$.

记 $S_i=a_{i,1}+a_{i,2}+...+a_{i,n}(i=1,2,\cdots,m)$.

因为 $t=n-1$ 是奇数，

所以 S_i 与 S_{i+1} 的奇偶性不相同($i=1,2,\cdots,m-1$).

因为 $S_1=n$, $S_m=0$,

所以 m 是奇数.

我们考虑 $B_{(m-1)\times n}$ 的第 i 行和 $i+1$ 行,

因为 $t=n-1$ ，所以这两行中都有 $n-1$ 列为 1，1 列为 0.

若这两行相同，则数表 $A_{m\times n}$ 的第 i 行和第 $i+2$ 行相同, $S_i=S_{i+2}$.

若这两行不同，设其分别在第 p,q 列为 0 ($p\neq q$)，则数表 $A_{m\times n}$ 的第 i 行和第 $i+2$ 行只

在第 p,q 列上不同，其他列都相同, $|S_i-S_{i+2}|\leq 2$.

因为 $S_1=n,S_m=0$ ，其中 n 是偶数.

所以 $n=|S_m-S_1|=|S_m-S_{m-2}+S_{m-2}-S_{m-4}+\cdots+S_3-S_1|\leq\dfrac{m-1}{2}\times 2$.

所以 $m\geq n+1$ ，即 $f(n-1)\geq n+1$.

结合①, $f(n-1)=n+1$.

综上所述, $f(t)$ 的最大值的为 $n+1$.