高三数学试卷参考答案

1.C　因为 $A=\{x|x=3k+1,k\in\mathbf{Z}\}$,$B=\{x|-3\leqslant x<4\}$,所以 $A\cap B=\{-2,1\}$.

2.B　$(\frac{3^{\sqrt{7}}}{27})^{\sqrt{7}+3}=(\frac{3^{\sqrt{7}}}{3^3})^{\sqrt{7}+3}=(3^{\sqrt{7}-3})^{\sqrt{7}+3}=3^{(\sqrt{7}-3)(\sqrt{7}+3)}=3^{-2}=\frac{1}{9}$.

3.C　依题意可得圆 C 的方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=a^2$,故选 C.

4.C　由直方图可得 $(0.004+a+0.018+0.022\times2+0.028)\times10=1$,所以 $a=0.005$,故 A 错误.

因为前 3 组的频率之和为 $(0.004+0.006+0.022)\times10=0.32$,前 4 组的频率之和为 $(0.004+0.006+0.022+0.028)\times10=0.6$,所以中位数在 $[70,80)$ 内,设中位数为 x,则 $0.32+\frac{x-70}{10}\times0.28=0.5$,所以 $x=\frac{535}{7}\approx76.4$,故 B 错误.

由直方图可得平均数为 $(0.004\times45+0.006\times55+0.018\times95+0.022\times65+0.022\times85+0.028\times75)\times10=76.2$,所以 C 正确.

因为成绩在 $[80,100)$ 内的频率为 0.4,所以这 100 名人员中成绩优秀的有 40 人,故 D 错误.

5.D　由图可得,当 $x\in(a,x_2)$,(x_4,b) 时,$f'(x)\geqslant0$,当 $x\in(x_2,x_4)$ 时,$f'(x)<0$.

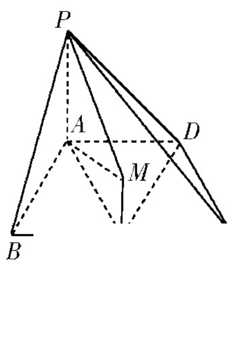
所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 (a,x_2),(x_4,b),单调递减区间为 (x_2,x_4),

所以 $f(x)$ 有 1 个极大值点,1 个极小值点.

6.B　设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d.若 $d=1$,则这 10 层的塔数之和为 $10\times1+\frac{10\times9}{2}=55$,则最多有 $55+10+10=75$ 座塔,不符合题意;若 $d\geqslant3$,则这 10 层的塔数之和不少于 $10\times1+\frac{10\times9}{2}\times3>108$,不符合题意.所以 $d=2$,这 10 层的塔数之和为 $10\times1+\frac{10\times9}{2}\times2=100$,塔数依次是 1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,依题意剩下 2 层的塔数为 3 与 5.所以这 12 层塔的塔数分别为 1,3,3,5,5,7,9,11,13,15,17,19,因此 A,C,D 正确,B 错误.

7.D　$f(x)=\log_a[k(x+1)^2]=\log_a k+2\log_a(x+1)$,由 $f(2)=2$,$f(8)=3$,得 $\log_a k+2\log_a(2+1)=2$,$\log_a k+2\log_a(8+1)=3$,两式相减得 $\log_a 9=1$,则 $a=9$,所以 $\log_a k+2=3$,$k=9$.该住房装修完成后要达到安全入住的标准,则 $0.48-0.1f(x)\leqslant0.08$,则 $f(x)\geqslant4$,即 $1+2\log_9(x+1)\geqslant4$,解得 $x\geqslant26$,故至少需要通风 26 周.

8.B　如图,取 BC 的中点 E,过 E 作 $ME\parallel AP$,使得 $2ME=AP$,连接 AE,DE,AM,PM.在等腰梯形 $ABCD$ 中,由 $BE=AB$,$\angle ABC=\frac{\pi}{3}$,可得 $\triangle ABE$ 为正三角形.因为底面 $ABCD$ 是等腰梯形,所以 $\triangle CDE$ 为正三角形,所以 $BE=AE=DE=EC=m$.由 $AP\perp$ 平面 $ABCD$,得 $ME\perp$ 平面

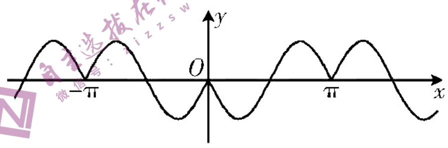


$ABCD$. 又 $2ME=AP$，所以 M 到 A,B,C,D,P 的距离相等，则 M 为球 O 的球心. 在 $\text{Rt}\triangle MAE$ 中，$AM=\sqrt{AE^2+ME^2}=\sqrt{m^2+(\frac{1}{2}m)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}m$，所以球 O 的表面积为 $4\pi\times(\frac{\sqrt{5}}{2}m)^2=5\pi m^2=125\pi$，解得 $m=5$.

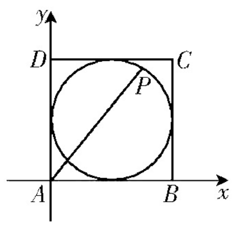
9. AC　设该圆柱的底面半径为 r cm. 若该圆柱的高为 2 cm，则 $2\pi r=4$，即 $r=\frac{2}{\pi}$，该圆柱的体积 $V=2\pi r^2=\frac{8}{\pi}$ cm^3；若该圆柱的高为 4 cm，则 $2\pi r=2$，即 $r=\frac{1}{\pi}$，该圆柱的体积 $V=4\pi r^2=\frac{4}{\pi}$ cm^3.

10. ABD　$f(x)=\text{sgn}(-\sin x)\sin 2x=\begin{cases}\sin 2x, \sin x<0,\\ 0, \sin x=0,\\ -\sin 2x, \sin x>0.\end{cases}$

作出 $f(x)$ 的部分图象，如图所示，由图可知，$f(x)$ 是偶函数，$f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{2},\pi]$ 上先增后减，$f(x)$ 的最小正周期为 2π，$f(x)$ 的图象关于点 $(-\frac{\pi}{2},0)$ 对称.



11. ABD　以 A 为坐标原点建立直角坐标系，如图所示，则 $B(2,0)$，$D(0,2)$，内切圆的方程为 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$，可设 $P(1+\cos\theta,1+\sin\theta)$，则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=2+2\cos\theta$ 的最大值为 4，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BD}=2\sin\theta-2\cos\theta=2\sqrt{2}\sin(\theta-\frac{\pi}{4})$ 的最大值为 $2\sqrt{2}$.



由 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$，得 $\lambda=\frac{1}{2}(1+\cos\theta)$，$\mu=\frac{1}{2}(1+\sin\theta)$，$\lambda-\mu=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\theta+\frac{\pi}{4})$，$\lambda+\mu=1+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$，所以 $\lambda-\mu$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\lambda+\mu$ 的最大值为 $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

12. BD　当 $a=b$ 时，直线 AF 与另一条渐近线平行，所以 $a\neq b$.

当 $a>b$ 时，如图 1，过 F 作另一条渐近线的垂线，垂足为 P，则 $|AF|=|PF|$，由 $|FB|=4|AF|$，得 $\sin\angle PBF=\frac{|PF|}{|BF|}=\frac{|AF|}{|BF|}=\frac{1}{4}$，则 $\cos\angle AOP=\frac{1}{4}$，所以 $2\cos^2\angle AOF-1=\frac{1}{4}$，则 $\cos\angle AOF=\sqrt{\frac{5}{8}}$，$\sin\angle AOF=\sqrt{\frac{3}{8}}$，所以 $\tan\angle AOF=\sqrt{\frac{3}{5}}$，则 $\frac{b}{a}=\sqrt{\frac{3}{5}}$，$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+(\frac{b}{a})^2}=\sqrt{1+\frac{3}{5}}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$.

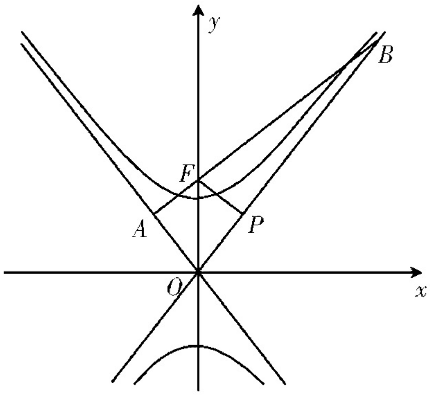


图 1

当 $a<b$ 时,如图 2,过 F 作另一条渐近线的垂线,垂足为 Q,则 $|AF|=|QF|$,由 $|FB|=4|AF|$,得 $\sin\angle QBF=\frac{|QF|}{|BF|}=\frac{|AF|}{|BF|}=\frac{1}{4}$,则 $\cos\angle AOB=\frac{1}{4}$,则 $\cos\angle AOQ=-\frac{1}{4}$,所以 $2\cos^2\angle AOF-1=-\frac{1}{4}$,则 $\cos\angle AOF=\sqrt{\frac{3}{8}}$,$\sin\angle AOF=\sqrt{\frac{5}{8}}$,所以 $\tan\angle AOF=\sqrt{\frac{5}{3}}$,则 $\frac{b}{a}=\sqrt{\frac{5}{3}}$,$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+(\frac{b}{a})^2}=\sqrt{1+\frac{5}{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

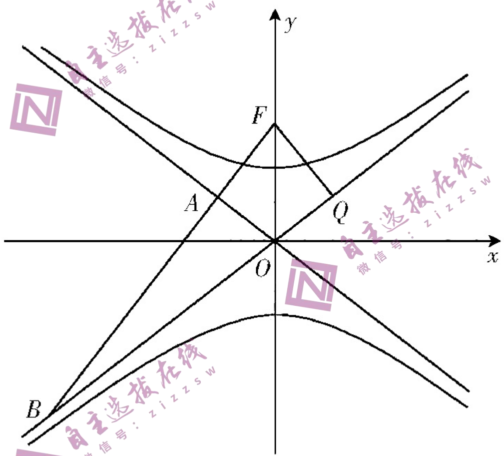


图 2

综上,C 的离心率为 $\frac{2\sqrt{10}}{5}$ 或 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

13. $\frac{8}{29}$　因为 $\frac{5-\mathrm{i}}{5+2\mathrm{i}}=\frac{(5-\mathrm{i})(5-2\mathrm{i})}{5^2+2^2}=\frac{23-15\mathrm{i}}{29}=\frac{23}{29}-\frac{15}{29}\mathrm{i}$,所以 $\frac{5-\mathrm{i}}{5+2\mathrm{i}}$ 的实部与虚部之和为 $\frac{23}{29}-\frac{15}{29}=\frac{8}{29}$.

14. $x^2=\sqrt{5}y$　依题意可设 C 的标准方程为 $x^2=2py(p>0)$,因为 C 的焦点到准线的距离为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$,所以 $p=\frac{\sqrt{5}}{2}$,所以 C 的标准方程为 $x^2=\sqrt{5}y$.

15. 2940　人数分配有 2,2,4 和 3,3,2 两种情形,所以共有 $(\frac{C_8^4C_4^2C_2^2}{A_2^2}+\frac{C_8^3C_5^3C_2^2}{A_2^2})A_3^3=490\times6=$ 2940 种安排方案.

16.0　$x^2+\frac{5}{4}y^2-4y+\frac{4}{xy}=x^2-xy+\frac{1}{4}y^2+y^2-4y+xy+\frac{4}{xy}\geqslant(x-\frac{1}{2}y)^2+(y-2)^2-4+2\sqrt{xy\cdot\frac{4}{xy}}=(x-\frac{1}{2}y)^2+(y-2)^2\geqslant0$，当且仅当 $x=1,y=2$ 时，$x^2+\frac{5}{4}y^2-4y+\frac{4}{xy}=0$，所以 $x^2+\frac{5}{4}y^2-4y+\frac{4}{xy}$ 的最小值为 0.

17. 解：(1)∵$2\sin C=3\sin A$，∴由正弦定理得 $2c=3a$，…………………………………… 1 分

∵a,b,c 是公差为 2 的等差数列，∴$a=b-2,c=b+2$，…………………………………… 2 分

∴$2(b+2)=3(b-2)$，∴$b=10$，∴$a=8,c=12$，…………………………………… 3 分

∴$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{64+100-144}{2\times8\times10}=\frac{1}{8}$，…………………………………… 4 分

∵$C\in(0,\pi)$，∴$\sin C=\frac{3\sqrt{7}}{8}$，

故△ABC 的面积为 $\frac{1}{2}\times8\times10\times\frac{3\sqrt{7}}{8}=15\sqrt{7}$. …………………………………… 5 分

(2)假设存在正整数 b，使得△ABC 的外心在△ABC 的外部，则△ABC 为钝角三角形，…………………………………… 6 分

依题意可知 $c>b>a$，则 C 为钝角，…………………………………… 7 分

则 $\cos C=\frac{(b-2)^2+b^2-(b+2)^2}{2b(b-2)}=\frac{b-8}{2(b-2)}<0$，

解得 $2<b<8$，…………………………………… 8 分

∵$b+b-2>b+2$，∴$b>4$，…………………………………… 9 分

∴$4<b<8$，

∴存在正整数 b，使得△ABC 的外心在△ABC 的外部，此时整数 b 的取值集合为$\{5,6,7\}$.
…………………………………… 10 分

18. 解：(1)设所选的题目为天文、航天、数字科技相关知识的题目分别为事件 A_1,A_2,A_3，所选的题目回答正确为事件 B，则 $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)=0.4\times\frac{2}{3}+0.4\times\frac{1}{2}+0.2\times\frac{1}{3}=\frac{8}{15}$. …………………………………… 4 分

(2)X 的可能取值为 0,2,4,6，…………………………………… 5 分

$P(X=0)=(1-\frac{2}{3})\times(1-\frac{1}{2})\times(1-\frac{1}{3})=\frac{1}{9}$，…………………………………… 6 分

$P(X=2)=\frac{2}{3}\times(1-\frac{1}{2})\times(1-\frac{1}{3})+(1-\frac{2}{3})\times\frac{1}{2}\times(1-\frac{1}{3})+(1-\frac{2}{3})\times(1-\frac{1}{2})\times\frac{1}{3}=\frac{7}{18}$，…………………………………… 7 分

$P(X=4)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times(1-\frac{1}{3})+(1-\frac{2}{3})\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times(1-\frac{1}{2})\times\frac{1}{3}=\frac{7}{18}$，………… 8 分

$P(X=6)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$，……………………………………

则 X 的分布列为

X	0	2	4	6
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{1}{9}$

………………………………………………………………………………………… 10 分

$E(X)=0\times\frac{1}{9}+2\times\frac{7}{18}+4\times\frac{7}{18}+6\times\frac{1}{9}=3$. ………………………………………… 12 分

19.(1)证明:连接 BC_1,交 B_1C 于 O,连接 AO. ………………………………………………… 1 分

因为侧面 BB_1C_1C 为菱形,所以 $B_1C\perp BC_1$. ……………………………………………… 2 分

因为 $AC=AB_1$,O 为 B_1C 的中点,所以 $AO\perp B_1C$. ………………………………………… 3 分

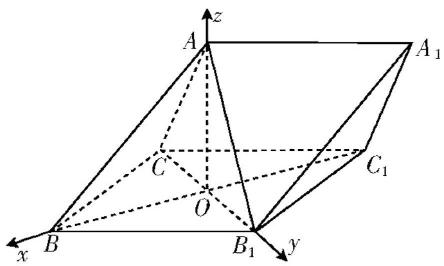
因为 $AO\cap BC_1=O$,且 $AO,BC_1\subset$平面 AOB,所以 $B_1C\perp$平面 AOB. ………………… 4 分

因为 $AB\subset$平面 AOB,所以 $AB\perp B_1C$. …………………………………………………… 5 分

(2)解:设 $AB=BC=2$,因为$\angle CBB_1=\frac{\pi}{3}$,所以 $B_1C=2$,$OB=\sqrt{3}$. ……………………… 6 分

因为 $AC\perp AB_1$,所以 $AO=1$.

因为 $AO^2+OB^2=AB^2$,所以 $AO\perp OB$,所以 OA,OB,OB_1 两两垂直. ……………………………………… 7 分



以 O 为坐标原点,分别以$\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OB_1},\overrightarrow{OA}$的方向为 x,y,z 轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系,则 $B_1(0,1,0)$,$C_1(-\sqrt{3},0,0)$,$A_1(-\sqrt{3},1,1)$,所以$\overrightarrow{B_1C_1}=(-\sqrt{3},-1,0)$,$\overrightarrow{C_1A_1}=(0,1,1)$. ……………………………………………………………………… 8 分

设平面 $A_1B_1C_1$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{B_1C_1}=-\sqrt{3}x-y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{C_1A_1}=y+z=0,\end{cases}$令 $x=1$,得 $\boldsymbol{n}=(1,-\sqrt{3},\sqrt{3})$. ……………………… 9 分

取平面 AB_1C 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(1,0,0)$, ……………………………………………… 10 分

因为 $\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\frac{1}{\sqrt{7}\times1}=\frac{\sqrt{7}}{7}$, ……………………………………………… 11 分

所以平面 AB_1C 与平面 $A_1B_1C_1$ 夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{7}}{7}$. ………………………………………… 12 分

20.解:(1)由$\frac{1}{a_n}=\frac{b_n}{n^2+1}$,得 $a_nb_n=n^2+1$, ………………………………………………… 1 分

由$\frac{1}{a_n-b_n}=b_n$,得 $a_nb_n=1+b_n^2$, ……………………………………………………… 2 分

两式相减得 $b_n^2=n^2$,因为$\{b_n\}$是正项数列,所以 $b_n=n$, ……………………………………… 4 分

所以 $a_n=\frac{n^2+1}{b_n}=n+\frac{1}{n}$. ………………………………………………………………… 5 分

(2)$[a_n+a_{n+1}]=[n+\frac{1}{n}+n+1+\frac{1}{n+1}]=[2n+1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}]=\begin{cases}4,n=1,\\ 2n+1,\cdots\end{cases}$

则当 $n\geqslant 2$ 时，$S_n=4\times 2+5\times 2^2+7\times 2^3+\cdots+(2n+1)\times 2^n$，………………………… 7 分

所以 $2S_n=16+5\times 2^3+7\times 2^4+\cdots+(2n+1)\times 2^{n+1}$，………………………… 8 分

两式相减得 $-S_n=12+2\times(2^3+2^4+\cdots+2^n)-(2n+1)\times 2^{n+1}$ ………………………… 9 分

$=12+2\times\dfrac{2^3-2^n\times 2}{1-2}-(2n+1)\times 2^{n+1}=(1-2n)\times 2^{n+1}-4$，………………………… 10 分

即 $S_n=(2n-1)2^{n+1}+4$. ………………………… 11 分

因为 $S_1=8$ 满足 $S_n=(2n-1)2^{n+1}+4$，所以 $S_n=(2n-1)2^{n+1}+4$. ………………………… 12 分

21.(1)解：因为点 $(1,e+1)$ 在曲线 $y=f(x)$ 上，所以 $f(1)=e-a-1=e+1$，所以 $a=-2$，……
………………………… 2 分

则 $f(x)=e^x-\ln x+1$，$f'(x)=e^x-\dfrac{1}{x}$，$f'(1)=e-1$，………………………… 3 分

故过点 $(1,e+1)$ 的切线 l 的方程为 $y-(e+1)=(e-1)(x-1)$，即 $y=(e-1)x+2$. ………
………………………… 4 分

(2)证明：要证明 $f(x)\geqslant(1-a)\ln a$，即要证 $e^x-\ln x-a-1\geqslant(1-a)\ln a$，

即证 $e^x-\ln x\geqslant(1-a)\ln a+a+1$. 设 $h(x)=e^x-\ln x$，则 $h'(x)=e^x-\dfrac{1}{x}$. ………………………… 5 分

当 $h'(x_0)=e^{x_0}-\dfrac{1}{x_0}=0$ 时，$e^{x_0}=\dfrac{1}{x_0}$，则 $h(x)=e^x-\ln x$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $h(x)_{\min}=e^{x_0}-\ln x_0=\dfrac{1}{x_0}-\ln x_0$. ………………………… 6 分

令 $g(a)=(1-a)\ln a+a+1$，则 $g'(a)=-\ln a+\dfrac{1}{a}$，

当 $g'(a_0)=-\ln a_0+\dfrac{1}{a_0}=0$ 时，$\dfrac{1}{a_0}=\ln a_0$，易知 $g(a)=(1-a)\ln a+a+1$ 在 $(0,a_0)$ 上单调递增，在 $(a_0,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $g(a)_{\max}=(1-a_0)\ln a_0+a_0+1=\dfrac{1-a_0}{a_0}+a_0+1=\dfrac{1}{a_0}+a_0$. ………………………… 8 分

又因为 $y=e^x$ 与 $y=\ln x$ 互为反函数，两函数的图象均与函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图象相交，设两交点分别为 $A(x_0,e^{x_0})$，$B(a_0,\ln a_0)$，则它们关于直线 $y=x$ 对称，所以 $x_0=\ln a_0$，$a_0=e^{x_0}$. ……
………………………… 10 分

又因为 $\dfrac{1}{a_0}=\ln a_0=x_0$，且 $\dfrac{1}{x_0}=e^{x_0}$，所以 $\ln\dfrac{1}{x_0}=x_0=\dfrac{1}{a_0}$，

$h(x)_{\min}-g(a)_{\max}=\dfrac{1}{x_0}-\ln x_0-\dfrac{1}{a_0}-a_0=a_0+\dfrac{1}{a_0}-\dfrac{1}{a_0}-a_0=0$，所以 $f(x)\geqslant(1-a)\ln a$ 成立.
………………………… 12 分

22.解：(1)依题意可得 $a=2$. ………………………… 1 分

当直线 l 经过点 $D(-2,\sqrt{2})$ 时，l 的方程为 $x=-4\sqrt{2}y+6$，………………………… 2 分

代入 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，整理得 $(8b^2+1)y^2-12\sqrt{2}b^2y+8b^2=0$，…………………

$\Delta=(-12\sqrt{2}b^2)^2-4(8b^2+1)\times 8b^2=32b^2(b^2-1)=0$， …………………………………… 4 分

解得 $b^2=1$，所以椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. …………………………………… 5 分

(2)依题意可得直线 l 的斜率不为 0，可设 $l:x=my+6$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$.

由 $\begin{cases}x=my+6,\\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$ 得 $(m^2+4)y^2+12my+32=0$，

则 $\begin{cases}y_1+y_2=-\dfrac{12m}{m^2+4},\\ y_1y_2=\dfrac{32}{m^2+4},\end{cases}$ …………………………………… 6 分

则 $k_{BP}k_{BQ}=\dfrac{y_1y_2}{(x_1-2)(x_2-2)}=\dfrac{y_1y_2}{(my_1+4)(my_2+4)}=\dfrac{y_1y_2}{m^2y_1y_2+4m(y_1+y_2)+16}$

$=\dfrac{\dfrac{32}{m^2+4}}{\dfrac{32m^2}{m^2+4}-\dfrac{48m^2}{m^2+4}+16}=\dfrac{32}{64}=\dfrac{1}{2}$. …………………………………… 8 分

因为 $k_{AP}k_{BP}=\dfrac{y_1}{x_1+2}\cdot\dfrac{y_1}{x_1-2}=\dfrac{1-\dfrac{x_1^2}{4}}{x_1^2-4}=-\dfrac{1}{4}$， …………………………………… 9 分

所以 $k_{AP}=-\dfrac{1}{2}k_{BQ}$. 又因为 $k_{AP}+k_{BQ}=-\dfrac{1}{2}$，所以 $k_{BQ}=-1$， …………………………………… 10 分

则直线 BQ 的方程为 $y=-x+2$，与 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 联立得 $Q(\dfrac{6}{5},\dfrac{4}{5})$， …………………………………… 11 分

所以 l 的方程为 $y=\dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{6}{5}-6}(x-6)$，即 $y=-\dfrac{1}{6}x+1$. …………………………………… 12 分