

莱州市高三入学测试

数学试题

注意事项：

1. 本试题满分 100 分。
2. 答卷前，务必将姓名和准考证号填涂在答题卡上。
3. 使用答题纸时，必须使用 0.5 毫米的黑色签字笔书写，要字迹工整，笔迹清晰。超出答题区书写的答案无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，第 1~7 题只有一项符合题目要求，第 8~10 题有多项符合题目要求。全部选对的得 4 分，选对但不全的得 2 分，有选错的得 0 分。

1. 设集合 $A = \{1, 2, 4\}$ ， $B = \{x | y = \sqrt{x-3}\}$ ，则 $A \cap B =$
A. $\{1\}$ B. $\{4\}$ C. $\{1, 4\}$ D. $\{2, 4\}$
2. 复数 $z = \frac{1+2i}{1-i}$ 的共轭复数为
A. $\bar{z} = \frac{-1-3i}{2}$ B. $\bar{z} = \frac{-1+3i}{2}$ C. $\bar{z} = -1-3i$ D. $\bar{z} = -1+3i$
3. 若直线 $y = 3x$ 的倾斜角为 α ，则 $\sin 2\alpha$ 的值为
A. $\frac{4}{5}$ B. $-\frac{4}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $-\frac{3}{5}$
4. 若向量 $a = (1, 2)$ ， $b = (x, -2)$ ，且 $a \perp b$ ，则 $|a+b| =$
A. 6 B. 5 C. 4 D. 3
5. 若函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + a \ln x$ 有两个不同的极值点，则实数 a 的取值范围是
A. $a > \frac{1}{4}$ B. $-\frac{1}{4} < a < 0$ C. $a < \frac{1}{4}$ D. $0 < a < \frac{1}{4}$

6. 《易经》是中国传统文化中的精髓，右图是易经八卦图（含乾、坎、离、艮、兑八卦），每一卦由三根线组成（——表示一根阳线，——表示一根阴线），现有 3 人各自八卦中任取两卦，恰有 2 人两卦的六根线中有四根阳线和两根阴



坤、巽、震、
随机的从
线的概率

数学试题（第 1 页，共 12 页）

为

- A. $\frac{297}{2744}$ B. $\frac{99}{2744}$ C. $\frac{675}{21952}$ D. $\frac{225}{21952}$

7. 已知函数 $f(x) = 2\sin \omega x (\omega > 0)$ 在 $x \in [a, 2](a < 0)$ 上最大值为 1 且递增, 则 $2-a$ 的最大值为

- A. 6 B. 7 C. 8 D. 9

8. 下列命题中的真命题为

- A. 命题 “ $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - x > 0$ ” 的否定是 “对于 $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - x < 0$ ”
 B. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 则 “ $2^a > 2^b$ ” 是 “ $\log_2 a > \log_2 b$ ” 的必要不充分条件
 C. 若幂函数的图象经过点 $(2, \frac{1}{4})$, 则它的单调递增区间是 $(-\infty, 0)$
 D. 函数 $y = 10^{\lg x}$ 与函数 $y = x^{\frac{1}{2}}$ 的定义域和值域都相同

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, $a_1 = 1$, 且 a_2, a_4, a_8 是一个等比数列中的相邻三项,

记 $b_n = a_n \cdot 2^{a_n}$, 则 $\{b_n\}$ 的前 n 项和可以是

- A. n B. $2n$ C. $2^{n+1} - 2$ D. $(n-1)2^{n+1} + 2$

10. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a , 点 E, F, G 分别棱 AB, AA_1, C_1D_1 的中点, 下列结论正确的是

- A. $BD_1 \perp$ 平面 ACB_1 B. 四面体 ACB_1D_1 的体积等于 $\frac{1}{2}a^3$
 C. FG 与平面 $ABCD$ 所成角的正切值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$ D. $B_1D_1 \parallel$ 平面 EFG

二、填空题: 本大题共有 4 个小题, 每小题 4 分, 共 16 分。

11. $(2x - \frac{1}{2\sqrt{x}})^8$ 展开式的第五项的系数为

12. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 若 $f(x)$ 的图象向左平移 2 个单位长度后关于 y 轴对称, 且

$f(1) = 1$, 则 $f(4) + f(5) =$

13. 过抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F 且斜率大于 0 的直线 l 交抛物线于点 A, B (点 A 于第一象

限), 交其准线于点 C , 若 $|BC| = 3|BF|$, 则直线 AB 的斜率为

14. 已知 $\lambda \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2, & x > \lambda \\ -x - 2, & x \leq \lambda \end{cases}$, 当 $\lambda = 0$ 时, 不等式 $f(x) < 0$ 的解集是_____;

若函数 $f(x)$ 恰有 2 个零点, 则 λ 的取值范围是_____. (本题每空 2 分)

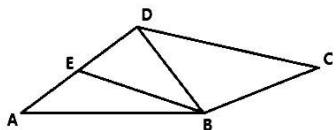
三、解答题: 本大题共 5 个小题, 共 44 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本小题满分 8 分)

在四边形 $ABCD$ 中, $\angle A = \angle C$, E 是

AD 上的点且

满足 $\triangle BED$ 与 $\triangle ABD$ 相似, $\angle AEB = \frac{3\pi}{4}$,



$\angle DBE = \frac{\pi}{6}$,

$DE = 6$.

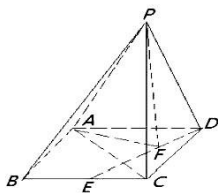
(1) 求 BD 的长度;

(2) 求三角形 BCD 面积的最大值.

16. (本小题满分 8 分)

在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $ABCD$ 为平行四边形, $AB = AD = 2$,

三角形 PBD 是边长为 $2\sqrt{2}$ 的正三角形, $PA = 2\sqrt{3}$.



(1) 证明: $PC \perp$ 平面 $ABCD$;

(2) 若 E 为 BC 中点, F 在线段 DE 上, 且 $\overrightarrow{DF} = \frac{2}{5}\overrightarrow{DE}$, 求二面角 $F-PA-C$ 的大小.

17. (本小题满分 9 分)

2019 年 6 月 25 日,《固体废物污染环境防治法(修订草案)》初次提请全国人大常委会审议,草案对“生活垃圾污染环境的防治”进行了专章规定.草案提出,国家推行生活垃圾分类制度.为了了解人民群众对垃圾分类的认识,某市环保部门对该市市民进行了一次垃圾分类网络知识问卷调查,每一位市民仅有一次参加机会,通过随机抽样,得到参加问卷调查的 1000 人(其中 450 人为女性)的得分(满分: 100 分)数据,统计结果如表所示:

数学试题(第 3 页, 共 12 页)

得分	[30, 40)	[40, 50)	[50, 60)	[60, 70)	[70, 80)	[80, 90)	[90, 100]
男性人数	15	90	130	100	125	60	30
女性人数	10	60	70	150	100	40	20

(1) 由频数分布表可以认为, 此次问卷调查的得分 Z 服从正态分布 $N(\mu, 210)$, μ 近似为这 1000

人得分的平均值 (同一组数据用该组区间的中点值作为代表), 请利用正态分布的知识求

$$P(50.5 < Z < 94);$$

(2) 把市民分为对垃圾分类“比较了解”(不低于 60 分的)

和“不太了解”(低于 60 分的)两类, 请完成如下 2×2

列联表, 并判断是否有 99% 的把握认为市民对垃圾

分类的了解程度与性别有关?

	不太了解	比较了解	合计
男性			
女性			
合计			

(3) 从得分不低于 80 分的被调查者中采用分层

抽样的方法抽取 10 名, 再从这 10 人中随机抽取 3 人,

求抽取的 3 人中男性人数的分布列及数学期望.

参考数据: ① $\sqrt{210} \approx 14.5$; ② 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0.6827$,

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0.9545, \quad P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0.9973;$$

③

$P(K^2 \geq k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

$$K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, \quad n = a + b + c + d.$$

18. (本小题满分 9 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 点 $P(\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ 在 C 上.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 设 O 为坐标原点, $H(0, -\frac{1}{2})$, 试判断在椭圆 C 上是否存在三个不同点 Q, M, N (其中 M, N 的纵坐标不相等), 满足 $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OQ}$, 且直线 HM 与直线 HN 倾斜角互补? 若存在, 求出直线 MN 的方程, 若不存在, 说明理由.

19. (本小题满分 10 分)

已知 $f(x) = x \ln x + \frac{a}{2}x^2 + 1$

(1) 若 $f(x)$ 在其定义域上为单调递减函数, 求实数 a 的取值范围;

(2) 若函数 $g(x) = f(x) + x \cos x - \sin x - x \ln x - 1$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上有 1 个零点.

(i) 求实数 a 的取值范围;

(ii) 证明: 若 $x > 1$, 则不等式 $(x-1)\left[f(x) - \frac{a}{2}x^2\right] > ax \ln x$ 成立.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”，即可获取《高考考前必背知识点》