理科数学试卷

注意事项：

1. 答题前，考生务必用黑色碳素笔将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号在答题卡上填写清楚.

2. 每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 在试题卷上作答无效.

3. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回. 满分150分，考试用时120分钟.

一、选择题（本大题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 已知集合 $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2=4\}$，$B=\{(x,y)\mid y=2\}$，则集合 $A\cap B$ 中元素的个数为

A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. 0

2. 命题"若 $x^2<4$，则 $-2<x<2$"的逆否命题是

A. 若 $-2<x<2$，则 $x^2<4$　　B. 若 $x^2\geqslant 4$，则 $x\geqslant 2$ 或 $x\leqslant -2$

C. 若 $-2<x<2$，则 $x^2\geqslant 4$　　D. 若 $x\geqslant 2$ 或 $x\leqslant -2$，则 $x^2\geqslant 4$

3. 如图1是某赛季两位篮球运动员最近10场比赛中各自得分的茎叶图，两人的平均得分分别为 $\overline{X}_{甲}$，$\overline{X}_{乙}$，则下列结论正确的是

甲		乙
9 7 4 4 4 3 2 1	1	0 9
2 0	2	0 1 2 2 4 6
	3	5 8

图1

A. $\overline{X}_{甲}<\overline{X}_{乙}$，甲比乙稳定

B. $\overline{X}_{甲}<\overline{X}_{乙}$，乙比甲稳定

C. $\overline{X}_{甲}>\overline{X}_{乙}$，甲比乙稳定

D. $\overline{X}_{甲}>\overline{X}_{乙}$，乙比甲稳定

4. 下列函数为奇函数的是

A. $f(x)=xe^{-x}$　　B. $f(x)=\sqrt{x^3}$

C. $f(x)=x^2\sin x$　　D. $f(x)=\ln|x|$

5. 深秋时节，霜叶红满地. 今要测量捡到的枫叶的面积，在边长为15cm的正方形纸片中描出枫叶的轮廓，然后随机撒入100粒豆子，恰有60粒落入枫叶轮廓中，则枫叶的面积近似为

A. 120cm^2　　B. 135cm^2

C. 150cm^2　　D. 165cm^2

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=1024$，点 (n, a_n) 在函数 $y=a\left(\frac{1}{2}\right)^x$ $(a\in\mathbf{R})$ 的图象上. 记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，则 $S_{10}-S_8=$

A. 6　　B. 7　　C. 8　　D. 9

7. 设非零复数 z_1，z_2 在复平面内分别对应向量$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，O 为原点，则$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$的充要条件是

A. $\dfrac{z_2}{z_1}=-1$　　B. $\dfrac{z_2}{z_1}=\mathrm{i}$

C. $\dfrac{z_2}{z_1}$为实数　　D. $\dfrac{z_2}{z_1}$为纯虚数

8. 半径为 4 的圆 C 与直线 l_1：$3x+4y-10=0$、l_2：$3x+4y+15=0$ 分别相交于点 A 和点 B、点 C 和点 D，若 $|AB|=4\sqrt{3}$，则 $|CD|=$

A. $2\sqrt{7}$　　B. 5　　C. $2\sqrt{5}$　　D. 4

9. 函数 $f(x)=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 在 $[0,\ 8\pi]$ 上的所有零点之和为

A. 45π　　B. 40π

C. 35π　　D. 30π

10. 如图 2，将长和宽之比为 2∶1 的长方形纸片 ADD_1A_1（图甲）折成一个正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$（图乙）的侧面，则异面直线 AP 与 A_1Q 所成角的余弦值为

A. $\dfrac{1}{4}$

B. $\dfrac{1}{5}$

C. $\dfrac{1}{6}$

D. $\dfrac{1}{7}$

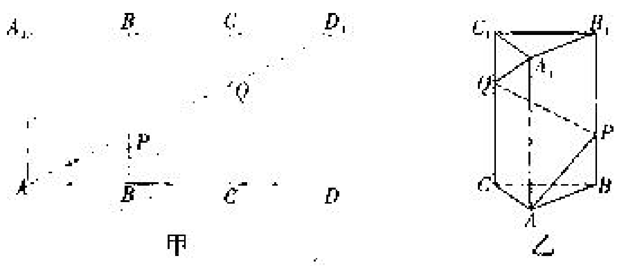

图 2

11. 已知 A，B 分别为椭圆 C：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的左、右顶点，P，Q 是椭圆上关于 x 轴对称的不同两点，设直线 AP，BQ 的斜率分别为 k_1，k_2，若 $k_1\in\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$，则 k_2 的取值范围为

A. $\left(\dfrac{3}{8},\ \dfrac{3}{4}\right)$　　B. $\left(\dfrac{4}{3},\ \dfrac{8}{3}\right)$

C. $\left(\dfrac{3}{4},\ \dfrac{3}{2}\right)$　　D. $\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{4}{3}\right)$

12. 三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点在球 O 的球面上，$PC\perp$平面 ABC，$PC=4$，$AB=\sqrt{10}$，$AC=3\sqrt{2}$，点 M 是 BC 的中点，$AM=\sqrt{13}$，则球 O 的表面积为

A. 24π　　B. 28π

C. 36π　　D. 40π

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. $\left(x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的展开式中常数项为________.

14. 已知 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 为单位向量，且 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影为 $-\dfrac{1}{2}$，则 $|\vec{a}+2\vec{b}|=$________.

15. 已知 F_1，F_2 为双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a，b>0)$ 的左右焦点，直线 l：$y=\sqrt{3}x$ 与双曲线 C 交于 A，B 两点，且 $|AB|=|F_1F_2|$，则双曲线 C 的离心率为________.

16. 已知函数 $f(x)=\dfrac{\sin\pi x}{x^2-x+1}$，下面四个结论：①$f(x)$ 的图象是轴对称图形；②$f(x)$ 的图象是中心对称图形；③$f(x)$ 在 $\left(0，\dfrac{1}{2}\right)$ 上单调；④$f(x)$ 的最大值为 $\dfrac{4}{3}$. 其中正确的有________.

三、解答题（共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分 12 分）

$\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $a=2\sqrt{3}$，$2b\cos A=a\cos C+c\cos A$.

（1）求 A；

（2）从两个条件：①$b=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\cos B$；②$b=\dfrac{1}{2}c$ 中任选一个作为已知条件，求 $\triangle ABC$ 的面积.

18.（本小题满分 12 分）

如图 3，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AC\perp BC$，$AC=3$，$AA_1=2BC=8$，D，E 分别是 B_1C_1，AA_1 的中点，F 是棱 BB_1 上的点且 $BF=3$，M 是 C_1D 的中点.

（1）证明：A_1M∥平面 CDE；

（2）求直线 CF 与平面 CDE 所成角的正弦值.

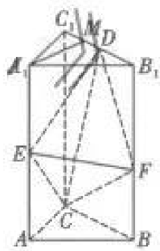

图 3

19.（本小题满分 12 分）

“女排精神”是中国女子排球队顽强战斗、勇敢拼搏精神的总概括. 为弘扬“女排精神”，甲、乙两班组织了一次排球比赛，采用“五局三胜”制，无论哪一方先胜三局则比赛结束. 假设每局比赛均分出胜负且每局比赛相互独立，每局比赛乙班获胜的概率为 $\dfrac{1}{3}$.

（1）若前两局已战成平局，求还需比赛 3 局比赛才结束且乙班获胜的概率；

（2）如果比赛的赛制有“五局三胜”制和“三局两胜”制，对于乙班来说，如何选择比赛赛制对自己获胜更有利，请通过计算说明理由.

20.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=(x-1)e^x-ax$.

（1）当 $a=0$ 时，求 $f(x)$ 的极值；

（2）若对 $\forall x\in[0,+\infty)$，$f(x)\geqslant-\dfrac{3}{2}a$ 恒成立，求 a 的取值范围.

21.（本小题满分 12 分）

已知抛物线 C：$x^2=4y$，焦点为 F，点 P 是 C 上任一点（除去原点 O），过点 P 作 C 的切线 l 交准线于点 Q.

（1）求抛物线 C 在 $P(2,1)$ 处的切线方程；

（2）若点 P 在第一象限，点 R 在准线上且位于点 Q 右侧.

（ⅰ）证明：$\angle FQR=2\angle PQR$；

（ⅱ）求 $\triangle PQF$ 面积的最小值.

请考生在第 22、23 两题中任选一题作答，并用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目的题号涂黑. 注意所做题目的题号必须与所涂题目的题号一致，在答题卡选答区域指定位置答题. 如果多做，则按所做的第一题计分.

22.（本小题满分 10 分）【选修 4-4：坐标系与参数方程】

在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程 $\begin{cases}x=e^t+e^{-t},\\ y=e^t-e^{-t},\end{cases}$（$t$ 为参数），在以原点 O 为极点，x 轴的非负半轴为极轴建立的极坐标系中，直线 l 的极坐标方程为 $\rho(3\sin\theta-5\cos\theta)=26$.

（1）求曲线 C 的普通方程和直线 l 的直角坐标方程；

（2）求曲线 C 上的点到直线 l 距离的最小值.

23.（本小题满分 10 分）【选修 4-5：不等式选讲】

已知函数 $f(x)=\left|x+\dfrac{1}{2}\right|-|x-a|$.

（1）若不等式 $f(x)+1\leqslant 0$ 有解，求实数 a 的取值范围；

（2）当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，记 $f(x)$ 的最大值为 M. 若 $m+n=M$，m，n，p，$q>0$，证明：$m\sqrt{p}+n\sqrt{q}\leqslant\sqrt{mp+nq}$.

理科数学参考答案

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	D	A	C	B	A	D	A	D	B	C	C

【解析】

1．因为直线 $y=2$ 与圆 $x^2+y^2=4$ 相切，所以 $A\cap B$ 的元素的个数是 1，故选 C.

2．原命题的条件是“若 $x^2<4$”，结论为“$-2<x<2$”，则其逆否命题是：若 $x\geqslant 2$ 或 $x\leqslant -2$，则 $x^2\geqslant 4$，故选 D.

3．根据茎叶图可知，甲运动员的平均成绩低于乙运动员的平均成绩，甲的成绩比乙的成绩更集中，因此甲比乙稳定，故选 A.

4．A 选项，$f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(-x)=-xe^{x}$，$-f(x)=-xe^{-x}$，故 $f(x)$ 为非奇非偶函数；B 选项，$f(x)$ 的定义域为 $[0,+\infty)$，不关于原点对称，故 $f(x)$ 为非奇非偶函数；C 选项，$f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(-x)=-x^2\sin x$，$-f(x)=-x^2\sin x$，故 $f(x)$ 为奇函数；D 选项，$f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，$f(-x)=\ln|x|$，$f(x)=\ln|x|$，故 $f(x)$ 为偶函数，故选 C.

5．由题可知，落入枫叶轮廓中的概率为 $P=\dfrac{S_{枫叶}}{S_{正方形}}=\dfrac{60}{100}=\dfrac{3}{5}$，所以枫叶的面积近似为

$S_{枫叶}=P\cdot S_{正方形}=\dfrac{3}{5}\times 15^2=135\text{cm}^2$，故选 B.

6．由题得 $a_1=1024=\dfrac{1}{2}a$，解得 $a=2^{11}$，故 $a_n=2^{11-n}$，所以 $S_{10}-S_8=a_9+a_{10}=2^2+2^1=6$，故选 A.

7．设 $z_1=x_1+y_1\mathrm{i}$，$z_2=x_2+y_2\mathrm{i}$，则 $\overrightarrow{OA}=(x_1,\ y_1)$，$\overrightarrow{OB}=(x_2,\ y_2)$，且 $\dfrac{z_2}{z_1}=$

$\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+(x_1y_2-x_2y_1)\mathrm{i}}{x_1^2+y_1^2}$，由 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$ 知 $x_1x_2+y_1y_2=0$ 且 $x_1y_2-x_2y_1\neq 0$，故 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$ 的充要条件是 $\dfrac{z_2}{z_1}$ 为纯虚数，故选 D.

8．由题得直线 l_1 与直线 l_2 之间的距离为 $d=\dfrac{25}{\sqrt{3^2+4^2}}=5$，所以圆心 C 在两直线之间．圆心 C

到直线 l_1 的距离为 $d_1=\sqrt{4^2-(2\sqrt{3})^2}=2$，则圆心 C 到直线 l_2 的距离为 $d_2=5-2=3$，故 $|CD|=2\sqrt{4^2-3^2}=2\sqrt{7}$，故选 A.

9．由 $x-\dfrac{\pi}{4}=k\pi$ 得 $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$，$k\in\mathbf{N}$，故 $f(x)$ 在 $[0,\ 8\pi]$ 上的零点从小到大排成首项为 $\dfrac{\pi}{4}$、公差为 π 的等差数列．由 $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\leqslant 8\pi$ 得 $0\leqslant k\leqslant 7$，即该数列共有 8 项，

所以所有零点之和为 $8\times\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{8\times 7}{2}\times\pi=30\pi$，故选 D.

10．设 $AD=6$，则 $AA_1=3$，$AB=BC=CA=2$．如图 1，通过补体将直线 AP 平移至 A_1R，则异面直线 AP 与 A_1Q 所成角等于 A_1R 与 A_1Q 所成角．由图得 $A_1Q=A_1R=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，$QR=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，则 $\cos\angle QA_1R=\dfrac{(\sqrt{5})^2+(\sqrt{5})^2-(2\sqrt{2})^2}{2\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\dfrac{1}{5}$，故选 B.

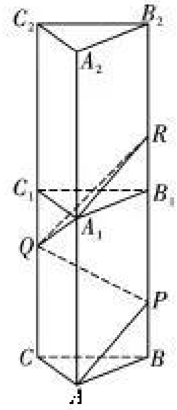

图 1

11．根据椭圆的标准方程 C：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 知 $A(-2,\ 0)$，$B(2,\ 0)$，设 $P(x_0,\ y_0)$，则 $Q(x_0,\ -y_0)$，且 $\dfrac{x_0^2}{4}+\dfrac{y_0^2}{3}=1$，$k_1=\dfrac{y_0}{x_0+2}$，$k_2=\dfrac{-y_0}{x_0-2}$，所以 $k_1k_2=\dfrac{-y_0^2}{x_0^2-4}=\dfrac{3}{4}$．又 $k_1\in\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$．所以 $k_2=\dfrac{3}{4k_1}\in\left(\dfrac{3}{4},\ \dfrac{3}{2}\right)$，故选 C.

12．由余弦定理可得 $\dfrac{\left(\dfrac{BC}{2}\right)^2+(\sqrt{13})^2-(\sqrt{10})^2}{2\times\dfrac{BC}{2}\times\sqrt{13}}=-\dfrac{\left(\dfrac{BC}{2}\right)^2+(\sqrt{13})^2-(3\sqrt{2})^2}{2\times\dfrac{BC}{2}\times\sqrt{13}}$，解得 $BC=2$，故 $\cos\angle BAC=\dfrac{(\sqrt{10})^2+(3\sqrt{2})^2-2^2}{2\times\sqrt{10}\times 3\sqrt{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\sin\angle BAC=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$．设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 r，由正弦定理可得 $\dfrac{BC}{\sin\angle BAC}=2r$，故 $r=\dfrac{BC}{2\sin\angle BAC}=\sqrt{5}$，所以球 O 的半径为 $R=\sqrt{r^2+\left(\dfrac{h}{2}\right)^2}=3$，球 O 的表面积为 $S=4\pi R^2=36\pi$，故选 C.

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

题号	13	14	15	16
答案	15	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}+1$	①③④

【解析】

13. $\left(x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的展开式中，$T_{k+1}=C_6^k x^{6-k}\left(\frac{-1}{\sqrt{x}}\right)^k=(-1)^k C_6^k x^{6-\frac{3}{2}k}$，令 $k=4$ 得 $T_5=C_6^4=\frac{6\times5}{2\times1}=15$．

14．由题得 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影为 $|\vec{a}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=-\frac{1}{2}$，所以 $\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=-\frac{1}{2}$，所以 $|\vec{a}+2\vec{b}|^2=\vec{a}^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}^2=1+4\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle+4=3$，即 $|\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{3}$．故答案为：$\sqrt{3}$．

15．不妨设 A，B 分别在第一、第三象限，则 $\angle AOF_2=60^\circ$．由 $|AB|=|F_1F_2|=2c$ 得 $|OA|=|OF_2|$，且四边形 AF_1BF_2 为矩形．故 $\triangle AOF_2$ 是正三角形，$|AF_2|=c$，$|AF_1|=\sqrt{3}c$．由双曲线的定义知 $\sqrt{3}c-c=2a$，从而 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{3}+1$，故答案为：$\sqrt{3}+1$．

16．$f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，由于 $f(1-x)=\frac{\sin\pi(1-x)}{(1-x)^2-(1-x)+1}=\frac{\sin\pi x}{x^2-x+1}=f(x)$，所以 $f(x)$ 的图象关于 $x=\frac{1}{2}$ 对称．故①正确；当 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 时，$y=\sin\pi x$ 单调递增且函数值为正数，$y=x^2-x+1$ 单调递减且函数值为正数，故 $f(x)=\frac{\sin\pi x}{x^2-x+1}$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递增，故③正确；由于 $\sin\pi x\leqslant1$，$x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geqslant\frac{3}{4}$，所以 $f(x)\leqslant\frac{4}{3}$，当且仅当 $x=\frac{1}{2}$ 时取等号，故④正确；由④知，当且仅当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 的函数值为 $\frac{4}{3}$，故 $f(x)$ 不可能是周期函数，从而 $f(x)$ 的图象不可能是中心对称图形，故②错误．故答案为：①③④．

三、解答题（共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17．（本小题满分 12 分）

解：（1）由正弦定理得 $2\sin B\cos A=\sin A\cos C+\cos A\sin C$，

所以 $2\sin B\cos A=\sin A\cos C+\cos A\sin C=\sin(A+C)=\sin(\pi-B)=\sin B$．

又 $B\in(0,\pi)$，所以 $\sin B\neq0$，所以 $\cos A=\frac{1}{2}$．

又 $A\in(0,\pi)$，

所以 $A=\frac{\pi}{3}$．　……………………………………………………（6 分）

（2）若选择①，将 $a=2\sqrt{3}$，$b=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\cos B$ 代入 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$ 得 $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\dfrac{\frac{4\sqrt{3}}{3}\cos B}{\sin B}$，

即 $\tan B=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，因为 $0<B<\pi$，所以 $B=\dfrac{\pi}{6}$，$b=2$，$C=\pi-A-B=\dfrac{\pi}{2}$.

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times2=2\sqrt{3}$.

若选择②，将 $a=2\sqrt{3}$，$b=\dfrac{1}{2}c$ 代入 $b^2+c^2-a^2=2bc\cos A$ 得 $c^2=16$，

解得 $c=4$（$c=-4$ 舍去），所以 $b=2$.

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times2\times4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$. ……………………………………（12 分）

18.（本小题满分 12 分）

（1）证明：如图 2，取 CD 的中点 N，连接 MN、EN.

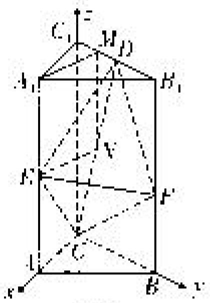

图 2

∵M，N 分别是 C_1D、CD 的中点，

∴MN // CC_1 且 $MN=\dfrac{1}{2}CC_1$，

又∵E 是 AA_1 的中点，

∴A_1E // CC_1 且 $A_1E=\dfrac{1}{2}CC_1$，

∴A_1E // MN 且 $A_1E=MN$.

∴四边形 A_1ENM 是平行四边形.

∴A_1M // EN.

又∵$A_1M\not\subset$ 平面 CDE，$EN\subset$ 平面 CDE，

∴A_1M // 平面 CDE. ……………………………………………………（6 分）

（2）解：如图 2，建立空间直角坐标系，

则 $C(0,0,0)$，$D(0,2,8)$，$E(3,0,4)$，$F(0,4,3)$.

∴$\overrightarrow{CD}=(0,2,8)$，$\overrightarrow{CE}=(3,0,4)$，$\overrightarrow{CF}=(0,4,3)$.

设 $\vec{n}=(x,\ y,\ z)\perp$ 平面 CDE，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CD}=2y+8z=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CE}=3x+4z=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}y=-4z,\\ x=\dfrac{-4}{3}z,\end{cases}$

故可取 $\vec{n}=(4,\ 12,\ -3)$，

设直线 CF 与平面 CDE 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{CF},\ \vec{n}\rangle|=\left|\dfrac{12\times4-3\times3}{\sqrt{3^2+4^2}\cdot\sqrt{3^2+4^2+12^2}}\right|=\dfrac{3}{5}$，

所以直线 CF 与平面 CDE 所成角的正弦值为 $\dfrac{3}{5}$. ……………………………（12 分）

19．（本小题满分 12 分）

解：（1）记 A_i 为事件“第 i 局乙胜”，$\overline{A_i}$ 为事件“第 i 局乙输”，$i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$，

B 为事件“还需比赛 3 局比赛才结束且乙班获胜”，则 $B=A_3\overline{A_4}A_5\cup\overline{A_3}A_4A_5$，

故 $P(B)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{27}$. ……………………………（4 分）

（2）记 C 为事件“‘三局两胜’制下乙班获胜”，D 为事件“‘五局三胜’制下乙班获胜”.

则 $P(C)=P(2\text{ 局获胜})+P(3\text{ 局获胜})=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{7}{27}$.

$P(D)=P(3\text{ 局获胜})+P(4\text{ 局获胜})+P(5\text{ 局获胜})=\left(\dfrac{1}{3}\right)^3+C_3^1\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\left(\dfrac{2}{3}\right)^1+C_4^2\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{17}{81}$.

由于 $\dfrac{7}{27}=\dfrac{21}{81}>\dfrac{17}{81}$，

故乙班选择“三局两胜”制对自己获胜更有利. ……………………………（12 分）

20．（本小题满分 12 分）

解：（1）当 $a=0$ 时，$f(x)=(x-1)\mathrm{e}^x$，$f'(x)=x\mathrm{e}^x$.

当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$.

所以 $f(x)$ 有极小值 $f(0)=-1$，无极大值. ……………………………（4 分）

（2）由题得 $f'(x)=x\mathrm{e}^x-a$，$x\in[0,\ +\infty)$.

①当 $a\leqslant0$ 时，$x\mathrm{e}^x>0$，$-a\geqslant0$，故 $f'(x)\geqslant0$，$f(x)$ 在 $[0,\ +\infty)$ 上单调递增.

所以 $f(x)_{\min}=f(0)=-1\geqslant-\frac{3}{2}a$，解得 $a\geqslant\frac{2}{3}$（舍去）.

②当 $a>0$ 时，$f'(0)=-a<0$，$f'(a)=a(e^a-1)>0$，且 $f'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

故 $f'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有唯一零点 $x_0\in(0,a)$，且 $a=x_0e^{x_0}$.

当 $x\in[0,x_0)$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

当 $x\in(x_0,+\infty)$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

所以 $f(x)_{\min}=f(x_0)=(x_0-1)e^{x_0}-ax_0=(x_0-1)\frac{a}{x_0}-ax_0=a\left(1-x_0-\frac{1}{x_0}\right)\geqslant-\frac{3}{2}a$，

即 $1-x_0-\frac{1}{x_0}\geqslant-\frac{3}{2}$，解得 $\frac{1}{2}\leqslant x_0\leqslant2$.

又因为 $a=x_0e^{x_0}$，所以 $\frac{\sqrt{e}}{2}\leqslant a\leqslant2e^2$.

综上，a 的取值范围为 $\left[\frac{\sqrt{e}}{2},2e^2\right]$. ……………………………………………（12 分）

21.（本小题满分 12 分）

解：（1）由 $x^2=4y$ 得 $y=\frac{1}{4}x^2$，$y'=\frac{1}{2}x$，则切线斜率为 $k=1$，

故切线方程为 $y-1=x-2$，即 $y=x-1$. ……………………………………………（2 分）

（2）（i）设 $P\left(x_0,\frac{x_0^2}{4}\right)(x_0>0)$，由（1）得切线斜率为 $k=\frac{1}{2}x_0$.

所以 $\tan\angle PQR=\frac{1}{2}x_0$，且切线为 $y-\frac{1}{4}x_0^2=\frac{1}{2}x_0(x-x_0)$，即 $2x_0x-4y-x_0^2=0$.

令 $y=-1$ 得 $x=\frac{x_0}{2}-\frac{2}{x_0}$，即 $Q\left(\frac{x_0}{2}-\frac{2}{x_0},-1\right)$.

①当 $x_0=2$ 时，$\tan\angle PQR=1$，$\angle PQR=\frac{\pi}{4}$；

$Q(0,-1)$，$\angle FQR=\frac{\pi}{2}$，满足 $\angle FQR=2\angle PQR$.

②当 $x_0\neq2$ 时，$\tan\angle FQR=k_{FQ}=\dfrac{1-(-1)}{0-\left(\frac{x_0}{2}-\frac{2}{x_0}\right)}=\dfrac{4x_0}{4-x_0^2}$，

$$\tan 2\angle PQR=\frac{2\tan\angle PQR}{1-\tan^2\angle PQR}=\frac{2\times\frac{1}{2}x_0}{1-\left(\frac{x_0}{2}\right)^2}=\frac{4x_0}{4-x_0^2},$$

所以 $\tan\angle FQR=\tan 2\angle PQR$．

因为 P 在第一象限，所以 $\angle FQR$，$2\angle PQR\in(0,\ \pi)$，故 $\angle FQR=2\angle PQR$．

综上，$\angle FQR=2\angle PQR$． ……………………………………………………………（6 分）

（注：其他证法酌情给分，如证明 $PF\perp QF$．）

（ii）由（1）得 $x_0>0$，

$$|PQ|=\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}x_0\right)^2}\,|x_P-x_Q|=\sqrt{1+\frac{1}{4}x_0^2}\left|x_0-\left(\frac{x_0}{2}-\frac{2}{x_0}\right)\right|=\frac{(x_0^2+4)\sqrt{x_0^2+4}}{4x_0},$$

点 F 到切线的距离为 $d=\dfrac{|-4-x_0^2|}{\sqrt{(2x_0)^2+4^2}}=\dfrac{\sqrt{x_0^2+4}}{2}$，

所以 $S_{\triangle PQF}=\dfrac{1}{2}|PQ|\,d=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{(x_0^2+4)\sqrt{x_0^2+4}}{4x_0}\times\dfrac{\sqrt{x_0^2+4}}{2}=\dfrac{(x_0^2+4)^2}{16x_0}=\dfrac{1}{16}\left(x_0^3+8x_0+\dfrac{16}{x_0}\right)$．

令 $g(t)=t^3+8t+\dfrac{16}{t}$，$t>0$．则 $g'(t)=3t^2+8-\dfrac{16}{t^2}=\dfrac{3t^4+8t^2-16}{t^2}=\dfrac{(t^2+4)(3t^2-4)}{t^2}$，

所以当 $t\in\left(0,\ \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$，$g'(t)<0$；当 $t\in\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\ +\infty\right)$，$g'(t)>0$．

故当 $t=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ 时，$g(t)$ 取最小值 $g\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)=\dfrac{128\sqrt{3}}{9}$．

所以当 $x_0=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ 时，$S_{\triangle PQF}$ 取最小值 $\dfrac{8\sqrt{3}}{9}$．

故 $\triangle PQF$ 面积的最小值为 $\dfrac{8\sqrt{3}}{9}$． ………………………………………………（12 分）

（注：其他解法酌情给分）

22.（本小题满分 10 分）【选修 4–4：坐标系与参数方程】

解：（1）由 $\begin{cases}x=e^t+e^{-t},\\ y=e^t-e^{-t},\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x^2=e^{2t}+e^{-2t}+2,\\ y^2=e^{2t}+e^{-2t}-2,\end{cases}$ 消去参数 t 得 $x^2-y^2=4$，

又$x=e^t+e^{-t}\geqslant 2$，所以曲线C的普通方程为$x^2-y^2=4(x\geqslant 2)$.

由$\rho(3\sin\theta-5\cos\theta)=26$得$5\rho\cos\theta-3\rho\sin\theta+26=0$，

所以直线l的直角坐标方程为$5x-3y+26=0$. ……………………………（5分）

（2）设点P的坐标为$(e^t+e^{-t},\ e^t-e^{-t})$，则点$P$到直线$l$的距离为

$$d=\frac{|5(e^t+e^{-t})-3(e^t-e^{-t})+26|}{\sqrt{5^2+3^2}}=\frac{2e^t+8e^{-t}+26}{\sqrt{34}}\geqslant\frac{2\sqrt{2e^t\cdot 8e^{-t}}+26}{\sqrt{34}}=\sqrt{34}，$$

当$2e^t=8e^{-t}$，即$e^t=2$，$t=\ln 2$，可以取到上述“=”，此时点P为$\left(\frac{5}{2},\ \frac{3}{2}\right)$.

所以曲线C上的点到直线l距离的最小值为$\sqrt{34}$. ……………………………（10分）

23.（本小题满分10分）【选修4–5：不等式选讲】

（1）解：由绝对值不等式$||x_1|-|x_2||\leqslant|x_1-x_2|$得$-|x_1-x_2|\leqslant|x_1|-|x_2|\leqslant|x_1-x_2|$，

故$f(x)=\left|x+\frac{1}{2}\right|-|x-a|\geqslant-\left|\left(x+\frac{1}{2}\right)-(x-a)\right|=-\left|a+\frac{1}{2}\right|$.

当且仅当$\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(a-\frac{1}{2}\right)\leqslant 0$时取“=”.

所以不等式$f(x)+1\leqslant 0$有解的充要条件是$1-\left|a+\frac{1}{2}\right|\leqslant 0$，解得$a\leqslant-\frac{3}{2}$或$a\geqslant\frac{1}{2}$.

故实数a的取值范围为$\left(-\infty,\ -\frac{3}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2},\ +\infty\right)$. ……………………………（5分）

（2）证明：由题得$f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|-\left|x-\frac{1}{2}\right|\leqslant\left|\left(x+\frac{1}{2}\right)-\left(x-\frac{1}{2}\right)\right|=1$.

当且仅当$x\geqslant\frac{1}{2}$时取“=”，故$f(x)_{\max}=1$.

所以$M=1$，$m+n=1$.

因为$(m\sqrt{p}+n\sqrt{q})^2-(\sqrt{mp+nq})^2=m^2p+n^2q+2mn\sqrt{pq}-mp-nq$

$=m(m-1)p+n(n-1)q+2mn\sqrt{pq}=-mnp-mnq+2mn\sqrt{pq}=-mn(\sqrt{p}-\sqrt{q})^2\leqslant 0$，

所以$(m\sqrt{p}+n\sqrt{q})^2\leqslant(\sqrt{mp+nq})^2$，

故$m\sqrt{p}+n\sqrt{q}\leqslant\sqrt{mp+nq}$. ……………………………（10分）

其他解法：由柯西不等式得

$(m\sqrt{p}+n\sqrt{q})^2=(\sqrt{m}\sqrt{mp}+\sqrt{n}\sqrt{nq})^2\leqslant(m+n)(mp+nq)=mp+nq$，

故$m\sqrt{p}+n\sqrt{q}\leqslant\sqrt{mp+nq}$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。