2023 届普通高等学校招生全国统一考试
青桐鸣大联考(高三)

数学(理科)

全卷满分 150 分，考试时间 120 分钟。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、班级、考场号、座位号、考生号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $M=\{1,2,3,4,5,6,7\}$，$N=\{x\mid\sqrt{2^x-1}<5\}$，则 $M\cap N=$ （　）

A. $\{1,2\}$　　B. $\{1,2,3\}$　　C. $\{1,2,3,4\}$　　D. $\{1,2,3,4,5\}$

2. 复数 z 满足 $(z-\mathrm{i})(2-\mathrm{i})=\mathrm{i}$，则 $|z|=$ （　）

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. 2　　D. $\sqrt{5}$

3. 已知函数 $f(x)=x(x-a)(x-2)$，$a\in\mathbf{R}$，命题 p：$0<a<2$，命题 q：$f'(a)<0$，则 p 是 q 的 （　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

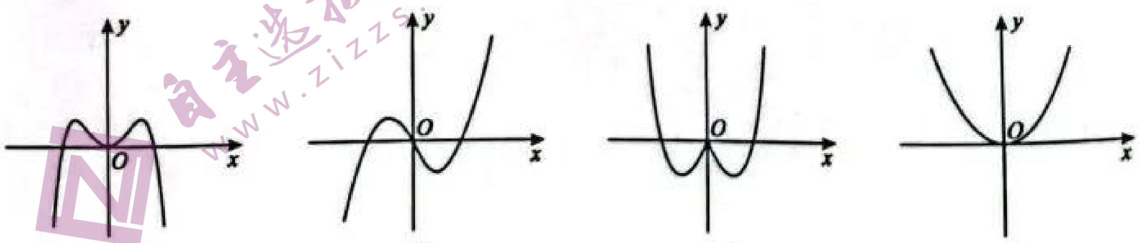
4. 已知正实数 a,b，满足 $a+b\geqslant\dfrac{9}{2a}+\dfrac{2}{b}$，则 $a+b$ 的最小值为 （　）

A. 5　　B. $\dfrac{5}{2}$　　C. $5\sqrt{2}$　　D. $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

5. 已知 $\alpha,\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\cos(\alpha+\beta)=-\dfrac{5}{13}$，$\tan\alpha+\tan\beta=3$，则 $\cos(\alpha-\beta)=$ （　）

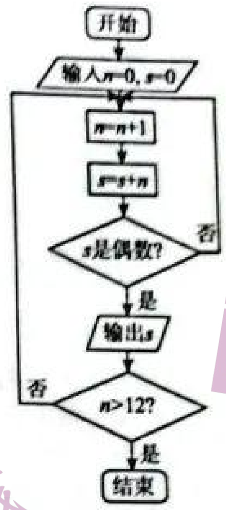
A. $\dfrac{1}{3}$　　B. $\dfrac{7}{13}$　　C. $\dfrac{4}{7}$　　D. 1

6. 函数 $f(x)=(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}-2x)\sin x\left(x\in\left(-\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)\right)$ 的图象大致是 （　）



A　　B　　C　　D

7. 若执行下面的程序框图，则输出的 s （　　）



A. 有 6 个值，分别为 6，10，28，36，66，78

B. 有 7 个值，分别为 6，10，28，36，66，78，91

C. 有 7 个值，分别为 6，10，28，36，66，78，120

D. 有 8 个值，分别为 6，10，28，36，66，78，120，136

8. 在△ABC 内有两点 M，O，满足 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$，$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\mathbf{0}$，且 $\overrightarrow{MO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，则 $x+y=$ （　　）

A. $\frac{1}{12}$　　B. $\frac{1}{6}$　　C. $-\frac{1}{12}$　　D. $-\frac{1}{6}$

9. 函数 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{5}\right)+\sqrt{3}\cos\left(x+\frac{8\pi}{15}\right)$ 的最大值为 （　　）

A. 1　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{7}$

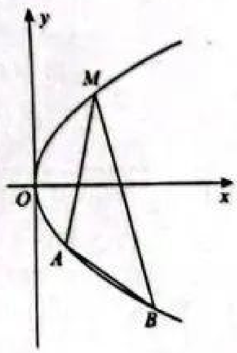
10. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=BC=2$，M 为 CC_1 的中点，$A_1C\perp$ 平面 MBD，则 A_1B 与 B_1C 所成角的余弦值为 （　　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{1}{5}$　　D. $\frac{3}{5}$

11. 数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=1$，$a_2=2$，且 λa_{2n-1}，a_{2n}，a_{2n+1} 成等差数列，λa_{2n}，a_{2n+1}，a_{2n+2} 成等比数列，有以下命题：①若 $\lambda=1$，则 $a_3=3$；②若 $\lambda=-1$，则 $a_4<0$；③ $\exists\lambda>0$，使 $a_3=a_4$；④λ 可取任意实数．其中正确命题的个数是 （　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

12. 已知抛物线 $y^2=4x$ 上有三点 M，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，M 点的纵坐标为 2，$y_1+y_2=-4$，且 $y_1,y_2<2$，则△MAB 面积的最大值为 （　　）



A. $\frac{16\sqrt{6}}{3}$　　B. $\frac{16\sqrt{6}}{9}$　　C. $\frac{32\sqrt{3}}{9}$　　D. $\frac{32\sqrt{3}}{3}$

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知 $f(x)=ax+\ln x$ 的一条切线是 $y=x$，则实数 $a=$________.

14. 已知一个球的表面上有四点 A,B,C,D，$BD=2\sqrt{3}$，$\angle BAD=60°$，$\angle BCD=90°$，平面 $ABD\perp$ 平面 BCD，则该球的表面积为________.

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+3a_2+\cdots+(2n-1)a_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3}$，$n\in N^*$，则 $a_1+a_2+\cdots+a_n=$________.

16. 已知双曲线 $x^2-\frac{y^2}{5}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，点 M 位于双曲线的右支上，F_1M 交左支于点 N，$\triangle MNF_2$ 的内切圆 I 的半径为 1，I 与 NF_2，MN 分别切于点 P,R，则 $\cos\angle RNP=$________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一)必考题：共 60 分。

17. (12 分)

已知锐角三角形 ABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，$\tan B+\tan C=\frac{\sqrt{3}\cos A}{\cos B\cos C}$.

(1)求 A；

(2)若 $a=\sqrt{6}$，求 $b+c$ 的取值范围.

18. (12 分)

为巩固拓展脱贫攻坚成果，全面推进乡村振兴，在国家产业扶贫政策的大力支持下，某贫困村利用当地自然条件，在南、北两山上种植苹果，现已开始大量结果，苹果成熟时，将苹果分为"一级""二级""三级"，价格从高到低，有一水果商人要收购这里的苹果，收购前，将南山和北山上的苹果各随机摘取了 200 千克，按等级分开后得到的数据为：南山上的"一级"苹果 40 千克，"二级"苹果 150 千克；南、北山上的"三级"苹果共 40 千克；北山上的"一级"苹果 50 千克.(假设两山上的苹果总产量相同，以样本的频率估计概率)

(1)若种植苹果的成本为 5 元/千克，苹果收购价格如下表：

等级	"一级"	"二级"	"三级"
价格(元/千克)	12	8	1

①分别计算南山和北山各随机摘取的 200 千克苹果的平均利润；

②若按个数计算，"一级"苹果平均每千克有 3 个，"二级"苹果平均每千克有 4 个，"三级"苹果平均每千克有 6 个，以此计算该村南山上的 200 千克苹果的个数，并按各等级苹果个数以分层抽样的方式从中抽取 13 个苹果，分别放在 13 个外形完全一样的包装内，水果商人在这 13 个苹果中随机取 2 个，求恰有 1 个"三级"苹果的概率.

(2)判断能否有 99%的把握认为"三级"苹果的多少与南、北山有关.

附：$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$.

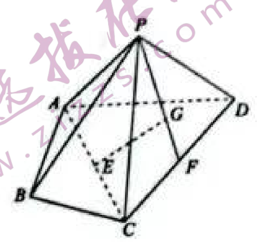
$P(K^2\geq k_0)$	0.1	0.05	0.01	0.005
k_0	2.706	3.841	6.635	7.879

19.（12 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$AB=BC=\frac{\sqrt{21}}{2}$，$AD=CD=AC=2\sqrt{3}$，$E$，$F$ 分别为 AC，CD 的中点，点 G 在 PF 上，且 G 为三角形 PCD 的重心.

（1）证明：$GE//$平面 PBC；

（2）若 $PA=PC$，$PA\perp CD$，四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 $3\sqrt{3}$，求直线 GE 与平面 PCD 所成角的正弦值.



20.（12 分）

已知点 $M\left(1,\frac{3}{2}\right)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上，A，B 分别是椭圆的左、右顶点，直线 MA 和 MB 的斜率之和满足：$k_{MA}+k_{MB}=-1$.

（1）求椭圆的标准方程；

（2）斜率为 1 的直线交椭圆于 P，Q 两点，椭圆上是否存在定点 T，使直线 PT 和 QT 的斜率之和满足 $k_{PT}+k_{QT}=0$（P，Q 与 T 均不重合）？若存在，求出 T 点坐标；若不存在，说明理由.

21.（12 分）

已知函数 $f(x)=a\sqrt{x-1}+b\sqrt{\ln x}$（$a\in\mathbf{R}$，$b\in\mathbf{R}$），$g(x)=\sqrt{x}\,e^{\frac{x}{2}}$.

（1）若 $a=1$，证明：当 $b\geq -1$ 时，$f(x)$ 为增函数；

（2）若 $f(x)=g(x)$ 有解，求 a^2+b^2 的最小值.

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22.［选修 4－4：坐标系与参数方程］（10 分）

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=\sin t+\dfrac{1}{4\sin t}, \\ y=\sqrt{\sin t}+\dfrac{1}{2\sqrt{\sin t}} \end{cases}$（$t$ 为参数且 $t\in(0,\pi)$），以坐标原点 O 为极点，x 轴的非负半轴为极轴，建立极坐标系，$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 且 $\tan\alpha=\frac{3}{4}$，直线 l 的极坐标方程为 $\rho\sin(\theta+\alpha)=m(m\in\mathbf{R})$.

（1）求直线 l 的直角坐标方程和曲线 C 的普通方程；

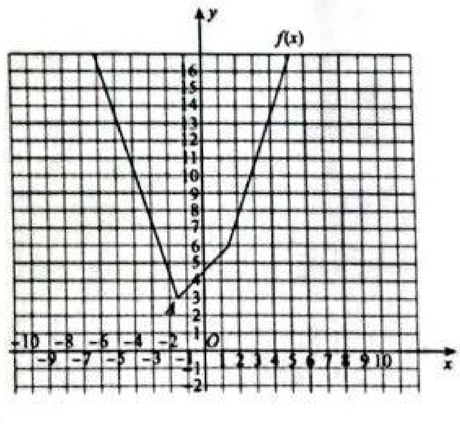
（2）若直线 l 与曲线 C 有公共点，求实数 m 的取值范围.

23.［选修 4－5：不等式选讲］（10 分）

已知函数 $f(x)=|2x+3|+|x-a|(a>0)$ 的图象如图所示，当 $x=-\frac{3}{2}$ 时，$f(x)$ 取得最小值 3，$g(x)=-x$.

（1）求实数 a 的值；

（2）若 $g(x-t)\leqslant f(x)$ 恒成立，求实数 t 的取值范围.



2023 届普通高等学校招生全国统一考试
青桐鸣大联考(高三)答案
数学(理科)

1. C 【解析】由 $\sqrt{2^x-1}<5$,得 $1\leqslant 2^x<26$,故 $M\cap N=\{1,2,3,4\}$. 故选 C.

2. B 【解析】$z-i=\frac{i}{2-i}=\frac{i(2+i)}{5}$,则 $z=-\frac{1}{5}+\frac{7i}{5}$,故 $|z|=\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{7}{5}\right)^2}=\sqrt{2}$. 故选 B.

3. C 【解析】$f'(x)=(x-a)(x-2)+x(x-2)+x(x-a)=3x^2-(2a+4)x+2a$,
$f'(a)=3a^2-(2a+4)\cdot a+2a<0$,解得 $0<a<2$,
故 p 是 q 的充要条件. 故选 C.

4. D 【解析】$(a+b)^2\geqslant\left(\frac{9}{2a}+\frac{2}{b}\right)(a+b)=\frac{13}{2}+\frac{9b}{2a}+\frac{2a}{b}\geqslant\frac{13}{2}+6=\frac{25}{2}$,故 $a+b\geqslant\frac{5\sqrt{2}}{2}$,当且仅当 $\begin{cases}a+b=\frac{9}{2a}+\frac{2}{b},\\ \frac{9b}{2a}=\frac{2a}{b},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a=\frac{3\sqrt{2}}{2},\\ b=\sqrt{2}\end{cases}$ 时取等号. 故选 D.

5. D 【解析】$\tan\alpha+\tan\beta=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=3$,化简得 $\sin(\alpha+\beta)=3\cos\alpha\cos\beta$,故 $1=\sin^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha+\beta)=9\cos^2\alpha\cos^2\beta+\frac{25}{169}$,解得 $\cos\alpha\cos\beta=\frac{4}{13}$,又 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=-\frac{5}{13}$,则 $\sin\alpha\sin\beta=\frac{9}{13}$,故 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=1$. 故选 D.

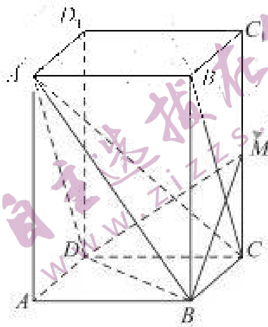
6. A 【解析】$f(-x)=(e^{-x}-e^{x}+2x)\sin(-x)=f(x)$,可知 $f(x)$ 为偶函数,排除 B;$f(\pi)=0$,排除 D;易知,$f(1)>0$,排除 C. 故选 A.

7. C 【解析】当 $n=3$ 时,输出 $s=6$;当 $n=4$ 时,输出 $s=10$;当 $n=7$ 时,输出 $s=28$;当 $n=8$ 时,输出 $s=36$;当 $n=11$ 时,输出 $s=66$;当 $n=12$ 时,输出 $s=78$;当 $n=15$ 时,$15>12$,输出 $s=120$,结束. 故选 C.

8. C 【解析】$\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC})=\mathbf{0}$,则 $3\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$①,$\overrightarrow{MA}+(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB})+2(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC})=\mathbf{0}$,则 $4\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$②,
①×4+②×3 得,$12\overrightarrow{MO}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$,
$\therefore x=\frac{1}{12}$,$y=-\frac{1}{6}$,$\therefore x+y=\frac{1}{12}-\frac{1}{6}=-\frac{1}{12}$.
故选 C.

9. A 【解析】$f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{5}\right)+\sqrt{3}\cos\left[\left(x+\frac{\pi}{5}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=\sin\left(x+\frac{\pi}{5}\right)+\sqrt{3}\left[\frac{1}{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{5}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{5}\right)\right]=-\frac{1}{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{5}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{5}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi}{3}\right)$,故最大值为 1. 故选 A.

10. B 【解析】连接 MB,MD,BD,连接 A_1D,如图,



$A_1B_1\perp$ 平面 BCC_1B_1,则 $A_1B_1\perp BM$,又 $A_1C\perp$ 平面 MBD,则 $A_1C\perp BM$,$A_1C\cap A_1B_1=A_1$,则 $BM\perp$ 平面 A_1B_1C,则 $BM\perp B_1C$,$\angle MBC=\angle BB_1C$,则 $\tan\angle MBC=\tan\angle BB_1C$,则 $\frac{MC}{2}=\frac{2}{BB_1}$,解得 $BB_1=2\sqrt{2}$,由长方体的性质易知,$A_1B_1 \mathrel{\underline{\parallel}} DC$,所以四边形 A_1B_1CD 为平行四边形,所以 $A_1D\parallel B_1C$,则 $\angle BA_1D$ 即为所求角,在 $\triangle BA_1D$ 中,$A_1B=A_1D=2\sqrt{3}$,$BD=2\sqrt{2}$,故 $\cos\angle BA_1D=\frac{12+12-8}{2\times2\sqrt{3}\times2\sqrt{3}}=\frac{2}{3}$. 故选 B.

11. C 【解析】当 $\lambda=1$ 时，$a_1+a_3=2a_2$，解得 $a_3=3$，故①正确；当 $\lambda=-1$ 时，$-a_1+a_3=2a_2$，解得 $a_3=5$，又 $-a_2\cdot a_4=a_3^2=25$，则 $a_4=-\frac{25}{2}<0$，故②正确；$\lambda a_1+a_3=4$，则 $a_3=4-\lambda$，$\lambda a_2\cdot a_4=a_3^2$，则 $a_4=\frac{a_3^2}{\lambda a_2}$，若 $a_3=a_4$，则 $4-\lambda=\frac{(4-\lambda)^2}{2\lambda}$，解得 $\lambda=4$ 或 $\lambda=\frac{4}{3}$，其中 $\lambda=4$ 不合题意，故 $\lambda=\frac{4}{3}$，③正确；$\lambda=4$ 时，$a_3=0$，此时 a_2,a_3,a_4 不能成等比数列，故④错误. 故选 C.

12. C 【解析】由题意得，$x_M=1$，则 $M(1,2)$，由 $y_1+y_2=-4$，得 $k_{AB}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{y_1-y_2}{\frac{y_1^2}{4}-\frac{y_2^2}{4}}=\frac{4}{y_1+y_2}=-1$.

设直线 AB：$x=t-y$，代入抛物线方程得 $y^2+4y-4t=0$，可得 $\Delta=16+16t>0$，得 $t>-1$.

$|AB|=\sqrt{2}|y_1-y_2|=\sqrt{2}\cdot\sqrt{16+16t}=4\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+t}$，点 $M(1,2)$ 到 AB 的距离为 $d=\frac{|3-t|}{\sqrt{2}}$，故 $S_{\triangle MAB}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=2\sqrt{1+t}\cdot|3-t|=2\sqrt{(1+t)(3-t)^2}$.

由 $y_1,y_2<2$，得 $4+8-4t>0$，即 $t<3$，又 $t>-1$，则 $-1<t<3$. 设 $g(t)=(1+t)(3-t)^2$，则 $g'(t)=(t-3)(3t-1)$，易得当且仅当 $t=\frac{1}{3}$ 时，$g(t)$ 取最大值为 $\frac{256}{27}$，故 $S_{\triangle MAB}$ 最大值为 $\frac{32\sqrt{3}}{9}$. 故选 C.

13. $1-\frac{1}{e}$ 【解析】设切点坐标为 (x_0,y_0)，则满足 $x_0=ax_0+\ln x_0$①，$f'(x_0)=a+\frac{1}{x_0}=1$，则 $ax_0=x_0-1$，代入①得 $x_0=x_0-1+\ln x_0$，解得 $x_0=e$，$\therefore a=1-\frac{1}{e}$.

14. 16π 【解析】设球心为 O，BD 的中点为 M，则 M 为 $\triangle BCD$ 的外心，$OM\perp$ 平面 BCD，又平面 $ABD\perp$ 平面 BCD，故 O 在平面 ABD 内，故 O 为 $\triangle ABD$ 的外心，$\frac{BD}{\sin 60^\circ}=2R=4$，故 $S_{球}=4\pi R^2=16\pi$.

15. $\frac{1}{6}-\frac{1}{2(2n+1)(2n+3)}$ 【解析】当 $n\geqslant 2$ 时，$(2n-1)a_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3}-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}=\frac{2}{(2n+1)(2n+3)}$，

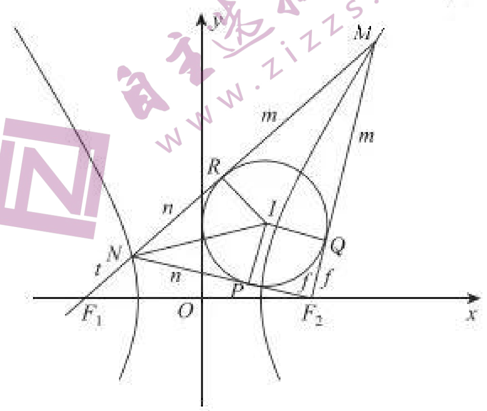
$\therefore a_n=\frac{2}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}(n\geqslant 2)$，$a_1=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{2}{15}$，满足 $a_n=\frac{2}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$，

$\therefore a_n=\frac{2}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$，$n\in\mathbf{N}^*$，

即 $a_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2n+3)-(2n-1)}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}-\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}\right]$.

$\therefore a_1+a_2+\cdots+a_n=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1\times3}-\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{3\times5}-\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}-\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}\right]=\frac{1}{6}-\frac{1}{2(2n+1)(2n+3)}$.

16. $\frac{3}{5}$ 【解析】设内切圆与 F_2M 切于点 Q，$|MR|=|MQ|=m$，$|NR|=|NP|=n$，$|F_2P|=|F_2Q|=f$，$|F_1N|=t$，如图.



则 $|MF_1|-|MF_2|=2a$，即 $m+n+t-(m+f)=2a$，化简得 $n+t-f=2a$①，$|NF_2|-|NF_1|=2a$，即 $n+f-t=2a$②，①+②得 $n=2a=2$. NI 平分 $\angle RNP$，则 $\tan\frac{1}{2}\angle RNP=\frac{1}{2}$，故 $\sin\frac{1}{2}\angle RNP=\frac{1}{\sqrt{5}}$，则 $\cos\angle RNP=1-2\sin^2\frac{1}{2}\angle RNP=\frac{3}{5}$.

17. **解**：(1)由题意得，$\frac{\sin B}{\cos B}+\frac{\sin C}{\cos C}=\frac{\sqrt{3}\cos A}{\cos B\cos C}$，

化简得 $\sin(B+C)=\sqrt{3}\cos A$，

即 $\sin A=\sqrt{3}\cos A$，

则 $\tan A=\sqrt{3}$，

解得 $A=\frac{\pi}{3}$.

(2)由题意及正弦定理 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}=2\sqrt{2}$，

得 $b=2\sqrt{2}\sin B$，$c=2\sqrt{2}\sin C$，

则 $b+c=2\sqrt{2}\sin B+2\sqrt{2}\sin C=2\sqrt{2}\sin B+2\sqrt{2}\sin(120°-B)=3\sqrt{2}\sin B+\sqrt{6}\cos B=2\sqrt{6}\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)$，

由(1)知，$A=\frac{\pi}{3}$.

又 $\begin{cases}0<B<\frac{\pi}{2},\\0<C<\frac{\pi}{2},\\B+C=\frac{2\pi}{3},\end{cases}$ 解得 $\frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{2}$.

则 $\frac{\pi}{3}<B+\frac{\pi}{6}<\frac{2\pi}{3}$，

故 $\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)\in\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$，

故 $b+c$ 的取值范围是$(3\sqrt{2},2\sqrt{6}]$.

18. **解**：(1)①由题意得，南山："一级"苹果 40 千克，"二级"苹果 150 千克，"三级"苹果 $200-190=10$(千克)，故南山随机摘取的 200 千克苹果的平均利润为 $\frac{12\times40+8\times150+1\times10-5\times200}{200}=3.45$(元/千克)，

北山："一级"苹果 50 千克，"三级"苹果 $40-10=30$(千克)，"二级"苹果 $200-50-30=120$(千克)，故北山随机摘取的 200 千克苹果的平均利润为 $\frac{12\times50+8\times120+1\times30-5\times200}{200}=2.95$(元/千克).

②南山上的这 200 千克苹果中，"一级"苹果有 $3\times40=120$(个)，"二级"苹果有 $4\times150=600$(个)，"三级"苹果有 $6\times10=60$(个)，共有 $120+600+60=780$(个)，

按分层抽样的方式抽取的 13 个苹果中，"一级"苹果有 $\frac{120}{780}\times13=2$(个)，"二级"苹果有 $\frac{600}{780}\times13=10$(个)，"三级"苹果有 $\frac{60}{780}\times13=1$(个)，

故所求概率为 $\frac{C_1^1C_{12}^1}{C_{13}^2}=\frac{2}{13}$.

(2)由(1)可得以下 2×2 列联表：

	"三级"苹果	"一级"和"二级"苹果	合计
南山	10	190	200
北山	30	170	200
合计	40	360	400

则 $K^2=\frac{400\times(10\times170-30\times190)^2}{200\times360\times200\times40}=\frac{100}{9}>11>6.635$，

故有 99%的把握认为"三级"苹果的多少与南、北山有关.

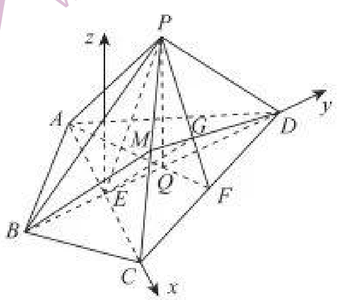
19. **解**：(1)证明：连接 BD，因为 $AB=BC$，$AD=CD$，所以 $AC\perp BD$，且 $BD\cap AC=E$.

由 $AD=CD=AC=2\sqrt{3}$，

得 $AE=\sqrt{3}$，$DE=3$，

则 $BE=\sqrt{AB^2-AE^2}=\frac{3}{2}$，所以 $DE=2BE$.

连接 DG 并延长交 PC 于点 M，如图，



因为 G 为△PCD 的重心，

所以 $DG=2GM$.

连接 BM，因为 $\frac{DE}{BE}=\frac{DG}{GM}$，所以 $EG\mathbin{/\!/}BM$.

又 $EG\not\subset$平面 PBC，$BM\subset$平面 PBC，故 $GE\mathbin{/\!/}$平面 PBC.

(2)连接 PE,因为 $PA=PC$,所以 $AC\perp PE$.

又 $AC\perp BD$,$BD,PE\subset$平面 PBD,$BD\cap PE=E$,

所以 $AC\perp$平面 PBD.

连接 AF 交 DE 于点 Q,则 $EQ=\frac{1}{3}DE=1$,

$AF\perp CD$.

又 $PA\perp CD$,$PA,AF\subset$平面 PAF,$PA\cap AF=A$,

所以 $CD\perp$平面 PAF.

连接 PQ,$PQ\subset$平面 PAF,则 $CD\perp PQ$,

因为 $AC\perp$平面 PBD,$PQ\subset$平面 PBD,

所以 $AC\perp PQ$,

因为 $AC\cap CD=C$,所以 $PQ\perp$平面 $ABCD$.

易得四边形 $ABCD$ 的面积为 $\frac{1}{2}AC\times BE+\frac{1}{2}AC\times DE=\frac{9\sqrt{3}}{2}$,

由四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 $3\sqrt{3}$得,$\frac{1}{3}\times\frac{9\sqrt{3}}{2}\times PQ=3\sqrt{3}$,所以 $PQ=2$.

以 E 为坐标原点,以 EC,ED 所在直线分别为 x 轴、y 轴,建立空间直角坐标系 $E-xyz$,

则 $E(0,0,0)$,$B\left(0,-\frac{3}{2},0\right)$,$C(\sqrt{3},0,0)$,$D(0,3,0)$,$P(0,1,2)$,$\overrightarrow{CD}=(-\sqrt{3},3,0)$,$\overrightarrow{PD}=(0,2,-2)$.

设平面 PCD 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CD}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PD}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-\sqrt{3}x+3y=0,\\ 2y-2z=0,\end{cases}$

取 $x=\sqrt{3}$,可得 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},1,1)$,

由(1)可知,M 为 PC 的中点,则 $M\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},1\right)$,所以 $\overrightarrow{BM}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},2,1\right)$.

由(1)知,$EG/\!/BM$,

所以直线 GE 与平面 PCD 所成的角等于直线 BM 与平面 PCD 所成的角,设为 θ,

所以 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{BM}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BM}|}{|\boldsymbol{m}||\overrightarrow{BM}|}=\frac{\frac{9}{2}}{\sqrt{5}\times\sqrt{\frac{23}{4}}}=\frac{9\sqrt{115}}{115}$,

故直线 GE 与平面 PCD 所成角的正弦值为 $\frac{9\sqrt{115}}{115}$.

20. **解:**(1)$k_{MA}+k_{MB}=\frac{\frac{3}{2}-0}{1+a}+\frac{\frac{3}{2}-0}{1-a}=-1$,

解得 $a^2=4$,

将 $\left(1,\frac{3}{2}\right)$代入椭圆方程 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1$,得 $b^2=3$,

故椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)假设存在定点 T,则设 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,$T(x_0,y_0)$,直线 PQ 的方程为 $y=x+t$,

由题意得 $\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}+\frac{y_2-y_0}{x_2-x_0}=0$,将 $y_1=x_1+t$,$y_2=x_2+t$ 代入整理得 $2x_1x_2+(t-x_0-y_0)(x_1+x_2)-2x_0(t-y_0)=0(*)$,

联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\ y=x+t,\end{cases}$ 整理得 $7x^2+8tx+4t^2-12=0$,

则 $x_1+x_2=-\frac{8t}{7}$,$x_1x_2=\frac{4t^2-12}{7}$,

代入$(*)$式整理得 $\left(\frac{8}{7}y_0-\frac{6}{7}x_0\right)t+2x_0y_0-\frac{24}{7}=0$,

由 $\begin{cases}\frac{8}{7}y_0-\frac{6}{7}x_0=0,\\ 2x_0y_0-\frac{24}{7}=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x_0=\frac{4\sqrt{7}}{7},\\ y_0=\frac{3\sqrt{7}}{7},\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_0=-\frac{4\sqrt{7}}{7},\\ y_0=-\frac{3\sqrt{7}}{7},\end{cases}$

代入验证得 $\left(\frac{4\sqrt{7}}{7},\frac{3\sqrt{7}}{7}\right)$,$\left(-\frac{4\sqrt{7}}{7},-\frac{3\sqrt{7}}{7}\right)$都在椭圆上,

故存在定点 T,使 $k_{PT}+k_{QT}=0$,

点 T 的坐标为 $\left(\frac{4\sqrt{7}}{7},\frac{3\sqrt{7}}{7}\right)$或$\left(-\frac{4\sqrt{7}}{7},-\frac{3\sqrt{7}}{7}\right)$.

21. 解：(1)当 $a=1$ 时，$f(x)=\sqrt{x-1}+b\sqrt{\ln x}$，

易知 $f(x)$ 的定义域为 $[1,+\infty)$，

则当 $b\geqslant -1$ 时，$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}+\dfrac{b}{2x\sqrt{\ln x}}\geqslant \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}-\dfrac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$，

令 $h(x)=x^2\ln x-x+1(x>1)$，

则 $h'(x)=2x\ln x+x-1$，易知 $h'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上为增函数，$h(1)=0$，故 $h'(x)>0$，

故 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上为增函数，

故 $h(x)>h(1)=0$，故 $x^2\ln x>x-1$，则 $\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}-\dfrac{1}{2x\sqrt{\ln x}}>0$，则原命题得证.

(2)设 $f(x)=g(x)$ 的解为 $x_0(x_0>1)$，

则 $a\sqrt{x_0-1}+b\sqrt{\ln x_0}=\sqrt{x_0}\,e^{\frac{x_0}{2}}$，

对 $\forall a,b,c,d\in\mathbf{R}$，$(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2=(ad-bc)^2\geqslant 0$，

故 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geqslant(ac+bd)^2$，

当且仅当 $ad=bc$ 时取等号，

故 $(a^2+b^2)[(\sqrt{x_0-1})^2+(\sqrt{\ln x_0})^2]\geqslant(a\sqrt{x_0-1}+b\sqrt{\ln x_0})^2=x_0e^{x_0}$，

所以 $a^2+b^2\geqslant\dfrac{x_0e^{x_0}}{x_0+\ln x_0-1}=\dfrac{e^{x_0+\ln x_0}}{x_0+\ln x_0-1}$.

令 $x_0+\ln x_0=t$，则 $t>1$.

设 $p(t)=\dfrac{e^t}{t-1}$，

则 $p'(t)=\dfrac{e^t(t-2)}{(t-1)^2}$，

当 $t=2$ 时，$p'(t)=0$；

当 $1<t<2$ 时，$p'(t)<0$，则 $p(t)$ 在 $(1,2)$ 上单调递减；

当 $t>2$ 时，$p'(t)>0$，则 $p(t)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增.

则 $p(t)_{\min}=p(2)=e^2$，

即 a^2+b^2 的最小值为 e^2.

22. 解：(1)由 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 且 $\tan\alpha=\dfrac{3}{4}$，

得 $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$，

$\therefore \rho\sin(\theta+\alpha)=m$，即 $\dfrac{4}{5}\rho\sin\theta+\dfrac{3}{5}\rho\cos\theta=m$，

$\therefore$ 直线 l 的直角坐标方程为 $3x+4y-5m=0$；

由 $t\in(0,\pi)$ 得 $\sin t\in(0,1]$，

则 $y=\sqrt{\sin t}+\dfrac{1}{2\sqrt{\sin t}}\in[\sqrt{2},+\infty)$，

又 $y^2=\left(\sqrt{\sin t}+\dfrac{1}{2\sqrt{\sin t}}\right)^2=\left(\sin t+\dfrac{1}{4\sin t}+1\right)=x+1$，

$\therefore$ 曲线 C 的普通方程为 $y^2=x+1$，$y\in[\sqrt{2},+\infty)$.

(2)将 $x=\dfrac{-4y+5m}{3}$ 代入 $y^2=x+1$ 整理得，

$y^2=\dfrac{-4y+5m}{3}+1$，$y\in[\sqrt{2},+\infty)$，

则 $m=\dfrac{3y^2+4y-3}{5}\geqslant\dfrac{3+4\sqrt{2}}{5}$，

$\therefore$ 实数 m 的取值范围为 $\left[\dfrac{3+4\sqrt{2}}{5},+\infty\right)$.

23. 解：(1)因为 $a>0$，所以 $f\left(-\dfrac{3}{2}\right)=|-3+3|+\left|-\dfrac{3}{2}-a\right|=3$，即 $a+\dfrac{3}{2}=3$，

解得 $a=\dfrac{3}{2}$，

故实数 a 的值为 $\dfrac{3}{2}$.

(2)由题意知，当 $x=-\dfrac{3}{2}$ 时，$f(x)$ 取得最小值 3，

当函数 $g(x-t)=t-x$ 的图象过点 $A\left(-\dfrac{3}{2},3\right)$ 时，

即 $t+\dfrac{3}{2}=3$ 时，$t=\dfrac{3}{2}$，

而由图象可知，$t\leqslant\dfrac{3}{2}$，

故 $t\in\left(-\infty,\dfrac{3}{2}\right]$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。