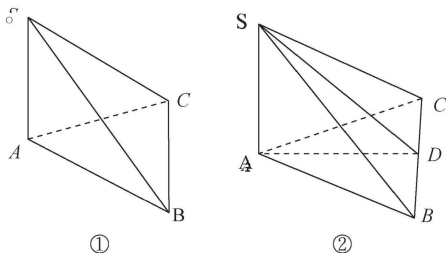


参考 案及解析

2022—2023 学年度上学期高三年级六调考试·文科数学

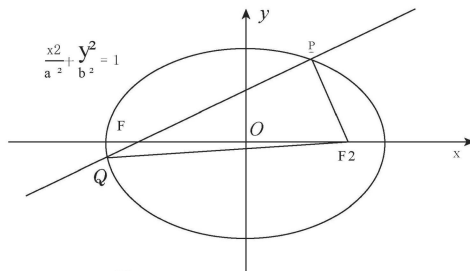
一、选择题

1. C 【解析】依题意, $1+z = \frac{1-i}{i} = -i(1-i) = -1-i$, 解得 $z = -2-i$, 所以复数 z 在复平面内对应的点为 $(-2, -1)$, 位于第三象限.
2. C 【解析】因为 $A = \{x | x^2 - 2x - 8 \leq 0, x \in \mathbb{N}^*\} = \{x | -2 \leq x \leq 4, x \in \mathbb{N}^*\} = \{1, 2, 3, 4\}$, 所以 $\complement_{\mathbb{N}^*} A = \{5, 6\}$.
3. D 【解析】选项 A: 当打分结果为 98, 98, 98, 98, 98 时, 满足平均数为 98, 中位数为 98, 所以 A 错误; 选项 B: 当打分结果为 99, 99, 96, 95, 94 时, 满足中位数为 96, 众数为 99, 所以 B 错误; 选项 C: 当打分结果为 89, 97, 97, 97, 98 时, 满足中位数为 97, 极差为 9, 所以 C 错误; 选项 D: 假设没有评委打满分, 结合极差为 6 可得总成绩 $S \leq (99-6) + 99 \times 4 = 489$, 则平均数 $\bar{x} \leq \frac{489}{5} = 97.8 < 98$, 与选项不符, 故假设不成立, 所以当平均数为 98, 极差为 6 时, 一定有评委打满分.
4. D 【解析】由 $|2a-b| = \sqrt{10}$ 两边平方得 $(2a-b)^2 = 10$, 即 $4a^2 - 4a \cdot b + b^2 = 4 - 4 \times 1 \times |b| \cdot \cos \frac{\pi}{4} + |b|^2 = 10$, 即 $|b|^2 - 2\sqrt{2} \cdot |b| - 6 = 0$, 则 $(|b| - 3\sqrt{2})(|b| + \sqrt{2}) = 0$, 解得 $|b| = 3\sqrt{2}$.
5. B 【解析】依题意, 由三视图可得几何体的直观图如图①所示:



在三棱锥 $S-ABC$ 中, $SA \perp$ 底面 ABC , 且底面三角形 ABC 为边长为 2 的等边三角形. 如图②, 取 BC 的中点 D , 连接 SD, AD , 则 $SB = SC = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{5}$, 所以 $SD = \sqrt{SB^2 - BD^2} = 2$, 则 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, $S_{\triangle SAB} = S_{\triangle SAC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$, $S_{\triangle SBC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$, 所以该几何体的表面积 $S = \sqrt{3} + 1 + 1 + 2 = 4 + \sqrt{3}$.

6. D 【解析】由已知, 可根据条件作出下图:



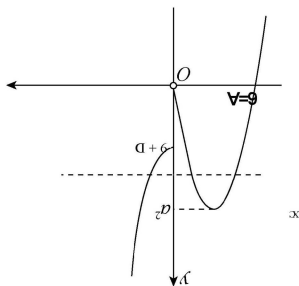
因为 $|PF_1| = 2|PF_2| = 5|F_1Q|$, 令 $|F_1Q| = t$, 所以 $|PF_1| = 5t, |PF_2| = \frac{5}{2}t$, 由椭圆的定义可知 $|PF_1| + |PF_2| = 2a = 5t + \frac{5}{2}t = \frac{15}{2}t$, 所以 $t = \frac{4}{15}a$, 所以 $|PF_1| = \frac{4}{3}a, |PF_2| = \frac{2}{3}a, |F_1Q| = \frac{4}{15}a, |PQ| = |PF_1| + |F_1Q| = \frac{4}{3}a + \frac{4}{15}a = \frac{24}{15}a$, 由椭圆的定义可知 $|QF_1| + |QF_2| = 2a$, 得 $|QF_2| = \frac{26}{15}a$. 在 $\triangle PQF_2$ 中, $|QF_2|^2 = |QP|^2 + |PF_2|^2$, 所以 $\angle QPF_2 = \frac{\pi}{2}$, 在 $\triangle PF_1F_2$ 中, $|F_1F_2| = 2c$, 所以 $|F_1F_2|^2 = |F_1P|^2 + |PF_2|^2$, 所以 $\frac{16}{9}a^2 + \frac{4}{9}a^2 = 4c^2$, 即 $\frac{c^2}{a^2} = \frac{5}{9}$, 得 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

7. B 【解析】由题意可知, 当 m 为偶数时, 可得 $2n \leq m$, 则 $b_m = \frac{m}{2}$; 当 m 为奇数时, 可得 $2n \leq m-1$, 则 $b_m = \frac{m-1}{2}$, 所以 $b_m = \begin{cases} \frac{m-1}{2} (m \text{ 为奇数}), \\ \frac{m}{2} (m \text{ 为偶数}). \end{cases}$ 则当 m 为偶数时, $S_m = b_1 + b_2 + \dots + b_m = \frac{1}{2}(1+2+\dots+m) - \frac{1}{2} \times \frac{m}{2} = \frac{m^2}{4}$, 则 $\frac{m^2}{4} = 30$, 因为 $m \in \mathbb{N}^*$, 所以无解; 当 m 为奇数时, $S_m = b_1 + b_2 + \dots + b_m = S_{m+1} - b_{m+1} = \frac{(m+1)^2}{4} - \frac{m+1}{2} = \frac{m^2-1}{4}$, 所以 $\frac{m^2-1}{4} = 30$, 因为 $m \in \mathbb{N}^*$, 所以 $m = 11$.
8. C 【解析】设线段 AB 的中点为 M , 则 $M(a, 1)$, 当 $a = 0$ 时, 存在点 $P(0, 1)$ 满足 $|PA| = |PB|$; 当 $a \neq 0$ 时, 直



线 AB 的斜率 $k = \frac{0-2}{2a-0} = -\frac{1}{a}$, 所以线段 AB 的垂直平分线 l 的方程为 $y = a(x-a) + 1$, 整理得 $ax - y - a^2 + 1 = 0$. 若 $|PA| = |PB|$, 则直线 l 与圆 O 有公共点, 所以 $\frac{|a^2-1|}{\sqrt{a^2+1}} \leq 1$, 整理得 $a^4 - 3a^2 \leq 0$, 因为 $a \neq 0$, 所以 $a^2 - 3 \leq 0$, 解得 $a \in [-\sqrt{3}, 0) \cup (0, \sqrt{3}]$. 综上可知, a 的取值范围是 $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

9. A 【解析】当 $x \geq 0$ 时, $f'(x) = e^x - 1 \geq 0$, 所以 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增, $f(x)_{\min} = f(0) = a + 6$; 当 $x < 0$ 时, $f(x) = -(x-a)^2 + a^2$, 当 $a \geq 0$ 时, $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 则 $g(x) = f(x) - 9$ 在 $\mathbf{R}$ 上最多有两个零点, 不满足题意, 所以 $a < 0$, 此时 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, a)$ 上单调递增, 在区间 $(a, 0)$ 上单调递减, $f(x)_{\max} = f(a) = a^2$. 作出函数 $f(x)$ 的图象, 要使函数 $g(x) = f(x) - 9$ 有三个零点, 由图象可知 $\begin{cases} a^2 > 9, \\ a + 6 \leq 9, \end{cases}$ 解得 $a < -3$. 综上可知, a 的取值范围是 $(-\infty, -3)$.



10. B 【解析】因为当 $1 < x_1 < x_2$ 时, $[f(x_1) - f(x_2)] \cdot (x_1 - x_2) > 0$ 恒成立, 所以当 $1 < x_1 < x_2$ 时, $f(x_2) - f(x_1) > 0$, 即 $f(x_2) > f(x_1)$, 所以函数 $f(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递增. 因为函数 $f(x+1)$ 是偶函数, 即 $f(1+x) = f(1-x)$, 所以函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 所以 $a = f\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{5}{2}\right)$, 又函数 $f(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(2) < f\left(\frac{5}{2}\right) < f(3)$, 即 $f(2) < f\left(-\frac{1}{2}\right) < f(3)$, 所以 $b < a < c$.

11. D 【解析】由题意知, 双曲线的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$, 设直线方程为 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x+c)$, 由 $\begin{cases} y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x+c), \\ y = -\frac{b}{a}x, \end{cases}$ 得 $y_A = \frac{c}{\sqrt{3} + \frac{a}{b}}$, 同理可得 $y_B = \frac{c}{\sqrt{3} - \frac{a}{b}}$. 因为 A 是 FB 的中点, 所以 $y_B = 2y_A$, 即 $b = \frac{c}{\sqrt{3} - \frac{a}{b}}$. 因为 $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 2a$, 所以 $y_A = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, $y_B = \sqrt{3}a$, 得 $x_A = -\frac{1}{2}a$, $x_B = a$, 所以 $x_C = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{a}{4}$, $y_C = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}a$, 所以 $k_{OC} = \frac{y_C}{x_C} = 3\sqrt{3}$.

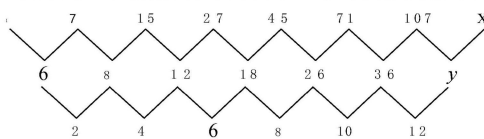
12. B 【解析】令 $g(x) = e^x - (x+1)$, 则 $g'(x) = e^x - 1$, 当 $x > 0$ 时, $g'(x) > 0$, 当 $x < 0$ 时, $g'(x) < 0$, 所以当 $x=0$ 时, $g(x)$ 取得最小值, 即 $g(x) \geq g(0) = 0$, 所以 $e^x \geq x+1$, 所以 $a = e^{-0.1} - 1 > -0.1 + 1 - 1 = -0.1$;

因为 $\tan x > x$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 所以 $b = -\tan 0.1 < -0.1$, 令 $\varphi(x) = x - 1 - \ln x (x > 0)$, 则 $\varphi'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$, 当 $0 < x < 1$ 时, $\varphi'(x) < 0$, 当 $x > 1$ 时, $\varphi'(x) > 0$, 所以当 $x=1$ 时, $\varphi(x)$ 取得最小值, 所以 $\varphi(x) \geq \varphi(1) = 0$, 所以 $\ln x \leq x-1$, 所以 $c = \ln 0.9 < 0.9 - 1 = -0.1$; 设 $f(x) = \ln(x+1) - \tan x$, $x \in (-1, 0)$, $f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x - (x+1)}{(x+1)\cos^2 x}$, 设 $h(x) = \cos^2 x - (x+1)$, $h'(x) = -2\cos x \sin x - 1 = -\sin 2x - 1$, 在区间 $(-1, 0)$ 上, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减, 所以 $h(x) > h(0) = 0$, 所以 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 所以 $f(-0.1) < f(0)$, 即 $\ln 0.9 - \tan(-0.1) < 0$, 所以 $c < b$. 综上, $a > b > c$.

二、填空题

13. 1.2 【解析】因为 $\bar{x} = \frac{-2-1+0+1+2}{5} = 0$, $\bar{y} = \frac{6.8+5.2+2.8+m-0.9}{5} = 3.02$, 所以 $m = 1.2$.

14. 155 【解析】所给数列为高阶等差数列, 设该数列的第 8 项为 x , 根据所给定义: 用数列的后一项减去前一项得到一个新数列, 得到的新数列也用后一项减去前一项得到一个新数列, 即得到了一个等差数列, 如图:



由图可得 $\begin{cases} y - 36 = 12, \\ x - 107 = y, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = 155, \\ y = 48. \end{cases}$

15. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 【解析】因为 $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\sin(2\alpha + \beta) = 2\sin \beta$, 所以 $\sin[(\alpha + \beta) + \alpha] = 2\sin[(\alpha + \beta) - \alpha]$, $\tan \alpha > 0$, $\tan \beta > 0$, 所以 $\sin(\alpha + \beta) \cos \alpha + \cos(\alpha + \beta) \sin \alpha = 2[\sin(\alpha + \beta) \cos \alpha - \cos(\alpha + \beta) \sin \alpha]$, 即 $3\cos(\alpha + \beta) \sin \alpha = \sin(\alpha + \beta) \cos \alpha$, 所以 $\tan(\alpha + \beta) = 3\tan \alpha$, 即 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} = 3\tan \alpha$, 所以 $\tan \beta = \frac{2\tan \alpha}{1 + 3\tan^2 \alpha} = \frac{2}{\frac{1}{\tan \alpha} + 3\tan \alpha} \leq \frac{2}{2\sqrt{\frac{1}{\tan \alpha} \cdot 3\tan \alpha}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 当且仅当 $\frac{1}{\tan \alpha} = 3\tan \alpha$, 即 $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, 等号成立, 此时 $\tan \beta$ 取得最大值 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

16. $(-\infty, -3]$ 【解析】由题意得 $f'(x) = \frac{2x^2 - ax + 2}{x}$ ($x > 0$). 若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$), 则 x_1, x_2 是关于 x 的方程 $2x^2 - ax + 2 = 0$ 的两个不等的正实根. 由 $\Delta = a^2 - 16 > 0$ 及方程根的情况, 得 $a > 4$, 则 $x_1 + x_2 = \frac{a}{2} > 2$, $x_1 x_2 = 1$. 又 $x_1 < x_2$, 所以 $0 <$

$x_1 < 1 < x_2$, 要使 $f(x_1) > mx_2$ 恒成立, 只需 $\frac{f(x_1)}{x_2} > m$ 恒成立. 又 $\frac{f(x_1)}{x_2} = \frac{x_1^2 - ax_1 + 2\ln x_1}{x_2} = \frac{x_1^2 - 2x_1^2 - 2 + 2\ln x_1}{x_1} = -x_1^3 - 2x_1 + 2x_1 \ln x_1$, 令 $h(t) = -t^3 - 2t + 2t \ln t$ ($0 < t < 1$), 则 $h'(t) = -3t^2 + 2\ln t$, 当 $0 < t < 1$ 时, $h'(t) < 0$, $h(t)$ 为减函数, 所以当 $0 < t < 1$ 时, $h(t) > h(1) = -3$. 由题意, 要使 $f(x_1) \geq mx_2$ 恒成立, 只需满足 $m \leq -3$, 即实数 m 的取值范围是 $(-\infty, -3]$.

三、解答题

17. 解: (1) 在 $\triangle ABC$ 中, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A$, 故 $\sqrt{3}c^2 = \sqrt{3}ac \cdot \cos B + bc \sin A$.

又 $c \neq 0$, 所以 $\sqrt{3}c = \sqrt{3}a \cos B + b \sin A$, (2分)

由正弦定理得 $\sqrt{3} \sin C = \sqrt{3} \sin A \cos B + \sin B \sin A$,

又 $\sin C = \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$,

故 $\sqrt{3} \sin A \cos B + \sqrt{3} \cos A \sin B = \sqrt{3} \sin A \cos B + \sin B \sin A$,

即 $\sqrt{3} \cos A \sin B = \sin B \sin A$. (4分)

因为 $\sin B \neq 0$, 所以 $\sqrt{3} \cos A = \sin A$,

所以 $\tan A = \sqrt{3}$,

因为 $0 < A < \pi$, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$. (6分)

(2) 因为 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$, (8分)

所以 $b+c = \frac{4}{\sqrt{3}}(\sin B + \sin C)$

$= \frac{4}{\sqrt{3}} \left[\sin B + \sin \left(\frac{2\pi}{3} - B \right) \right]$

$= \frac{4}{\sqrt{3}} \left(\sin B + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos B + \frac{1}{2} \sin B \right)$

$= \frac{4}{\sqrt{3}} \left(\frac{3}{2} \sin B + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos B \right)$

$= 4 \sin \left(B + \frac{\pi}{6} \right)$. (10分)

因为 $0 < B < \frac{2\pi}{3}$, 所以 $\frac{\pi}{6} < B + \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6}$,

所以 $2 < 4 \sin \left(B + \frac{\pi}{6} \right) \leq 4$, 当 $B = \frac{\pi}{3}$ 时取得最大值,

所以 $2 < b+c \leq 4$, 即 $b+c$ 的取值范围是 $(2, 4]$. (12分)

18. 解: (1) 用频率估计概率, 甲公司生产的动车的终到正点率不低于 0.95 的概率约为 $\frac{200}{300} = \frac{2}{3}$; (3分)

乙公司生产的动车的终到正点率不低于 0.95 的概率约为 $\frac{190}{300} = \frac{19}{30}$. (6分)

(2) 因为 $K^2 = \frac{600 \times (100 \times 190 - 110 \times 200)^2}{210 \times 390 \times 300^2} = \frac{200}{273} < 1$, (10分)

所以 $K^2 < 2.706$, 所以没有 90% 的把握认为甲、乙两家公司生产的动车的终到正点率是否低于 0.95 与生

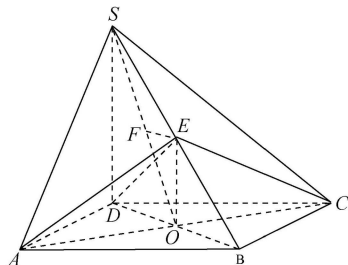
产动车的公司有关. (12分)

19. (1) 证明: 如图, 连接 BD , 因为四边形 $ABCD$ 为菱形, 所以 $AC \perp BD$,

因为 $SD \perp$ 平面 $ABCD$, $AC \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $SD \perp AC$, (2分)

又因为 $SD \cap BD = D$, 所以 $AC \perp$ 平面 SBD ,

又因为 $DE \subset$ 平面 SBD , 所以 $AC \perp DE$. (4分)



(2) 解: 设点 E 到平面 ABC 的距离为 h ,

则三棱锥 $E-ABC$ 的体积 $V = \frac{1}{3} \times S_{\triangle ABC} \times h = \frac{1}{3} \times$

$\frac{1}{2} \times AB \times BC \times \sin(180^\circ - \angle DAB) \times h = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times$

$2 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times h = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 解得 $h = 2$. (6分)

因为 $SD \perp$ 平面 $ABCD$, $SD = 4$, 所以 $SD = 2h$, 即 E 是棱 SB 的中点,

设 $AC \cap BD = O$, 如图, 连接 EO , 则 $EO \perp$ 平面 $ABCD$,

所以 $EO \perp DB$,

过点 E 作 SO 的垂线, 垂足为 F , 由 (1) 知, $AC \perp$ 平面 SBD , 所以 $AC \perp EF$,

又 $AC \cap SO = O$, 所以 $EF \perp$ 平面 SAC ,

即线段 EF 的长度就是点 E 到平面 SAC 的距离. (8分)

因为 $AB = AD = 2$, $\angle BAD = 60^\circ$, 所以 $BD = 2$.

又因为 $S_{\triangle SOE} = S_{\triangle SDB} - (S_{\triangle SDO} + S_{\triangle SOB}) =$

$\frac{1}{2} \times BD \times SD - \left(\frac{1}{2} \times DO \times SD + \frac{1}{2} \times OB \times OE \right) =$

$\frac{1}{2} \times 2 \times 4 - \left(\frac{1}{2} \times 1 \times 4 + \frac{1}{2} \times 1 \times 2 \right) = 1$, (10分)

因为 $SO = \sqrt{SD^2 + DO^2} = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$,

所以 $S_{\triangle SOE} = \frac{1}{2} \times SO \times EF = \frac{1}{2} \times \sqrt{17} \times EF = 1$,

所以 $EF = \frac{2\sqrt{17}}{17}$,

即点 E 到平面 SAC 的距离为 $\frac{2\sqrt{17}}{17}$. (12分)

20. 解: (1) 由题意, 函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, 可得 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$,

因为函数 $f(x)$ 的图象在点 $P(1, 2)$ 处的切线斜率为 4, 且在 $x = -1$ 处取得极值,

可得 $\begin{cases} f(1) = 2, \\ f'(1) = 4, \\ f'(-1) = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 1 + a + b + c = 2, \\ 3 + 2a + b = 4, \\ 3 - 2a + b = 0, \end{cases}$

解得 $a = 1, b = -1, c = 1$,

所以 $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$, (3分)

可得 $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$,

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = -1$ 或 $x = \frac{1}{3}$.

当 x 变化时, $f'(x), f(x)$ 的变化情况如下:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, \frac{1}{3})$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{3}, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	2	↘	$\frac{22}{27}$	↗

所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(-1, \frac{1}{3})$; 单调递增区间是 $(-\infty, -1), (\frac{1}{3}, +\infty)$. (6分)

(2) 由(1)可得 $g(x) = f(x) + m - 1 = x^3 + x^2 - x + m$,
则 $g'(x) = f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$, (8分)
由上表知, 函数 $g(x)$ 在 $x = -1$ 处取得极大值, 在 $x = \frac{1}{3}$ 处取得极小值,

要使得 $g(x)$ 有三个零点, 则满足 $\begin{cases} g(-1) > 0, \\ g(\frac{1}{3}) < 0, \end{cases}$

即 $\begin{cases} m+1 > 0, \\ m-\frac{5}{27} < 0, \end{cases}$ 解得 $-1 < m < \frac{5}{27}$, (10分)

所以 m 的取值范围为 $(-1, \frac{5}{27})$. (12分)

21. (1) 解: 由题意, $F(0, \frac{p}{2})$, 当 $AB \parallel x$ 轴时,

将 $y = \frac{p}{2}$ 代入 $x^2 = 2py$, 得 $x^2 = p^2$, 解得 $x = \pm p$. (2分)

又 $|AB| = 2$, 故 $2p = 2$, 解得 $p = 1$.
故抛物线 C 的方程为 $x^2 = 2y$. (4分)

(2) 证明: 由(1), 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 直线 l 的方程为 $y = kx + \frac{1}{2}$,

与抛物线方程联立得 $x^2 - 2kx - 1 = 0, \Delta > 0$, 故 $x_1 + x_2 = 2k, x_1 x_2 = -1$. (5分)

又抛物线方程为 $y = \frac{1}{2}x^2$,

故 $y' = x$, 故切线 PA 的方程为 $y - \frac{1}{2}x_1^2 = x_1(x - x_1)$, 即 $y = x_1x - \frac{1}{2}x_1^2$,

同理可得切线 PB 的方程为 $y = x_2x - \frac{1}{2}x_2^2$,

联立 $\begin{cases} y = x_1x - \frac{1}{2}x_1^2, \\ y = x_2x - \frac{1}{2}x_2^2, \end{cases}$ 可得 $(x_1 - x_2)x = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2)$,
 $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$,

解得 $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, 代入 $y = x_1x - \frac{1}{2}x_1^2$ 中得 $y = \frac{1}{2}x_1(x_1 + x_2) - \frac{1}{2}x_1^2 = \frac{1}{2}x_1x_2$,

又 $x_1 x_2 = -1$, 所以可得 $P(k, -\frac{1}{2})$. (8分)

故当 $k = 0$ 时有 $l \perp PF$,

当 $k \neq 0$ 时,

因为 $k_{FP} = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{k - 0} = -\frac{1}{k}$, 故 $k_{FP} \cdot k_l = -1$, 也满足 $l \perp PF$, 故 $l \perp PF$ 恒成立. (10分)

又 $k_{PA} \cdot k_{PB} = x_1 x_2 = -1$, 故 $PA \perp PB$.
所以 $\angle PAB + \angle PBA = 90^\circ, \angle PAF + \angle APF = 90^\circ$,
故 $\angle PBF = \angle APF$,

故 $Rt\triangle PBF \sim Rt\triangle APF$, 则 $\frac{|BF|}{|PF|} = \frac{|PF|}{|AF|}$,
即 $|PF|^2 = |AF| \cdot |BF|$. (12分)

22. 解: (1) 因为 $\begin{cases} x = 2\cos^2 \alpha, \\ y = \sin 2\alpha, \end{cases}$ 所以 $\begin{cases} x = \cos 2\alpha + 1, \\ y = \sin 2\alpha, \end{cases}$

消去 α , 得 $(x-1)^2 + y^2 = 1$. (2分)

由 $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$, 得 $\rho^2 - 2\rho \cos \theta = 0$,
所以 C 的极坐标方程为 $\rho = 2\cos \theta$. (4分)

(2) 因为 $|OA| = \rho_A = 2\cos \frac{\pi}{3} = 1, |OB| = \rho_B = 2\cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$,

又 $\angle AOB = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$,

所以 $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \times |OA| \times |OB| \times \sin \angle AOB = \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$. (6分)

因为 OM 是圆 C 的直径, 所以 $\angle OBM = \frac{\pi}{2}$,

又因为 $|BM| = |OM| \times \sin \theta_2 = 2 \times \frac{1}{2} = 1$,

所以 $S_{\triangle MOB} = \frac{1}{2} \times |OB| \times |BM| = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, (8分)

所以 $S_{\text{四边形} OABM} = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle MOB} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$. (10分)

23. (1) 解: 由题意知 $f(x) = |x+1| + |x-3| =$

$\begin{cases} -2x+2, & x \leq -1, \\ 4, & -1 < x < 3, \\ 2x-2, & x \geq 3. \end{cases}$ (2分)

当 $x \leq -1$ 时, $-2x+2 > 6$, 解得 $x < -2$;

当 $-1 < x < 3$ 时, $4 < 6$, 不等式无解;

当 $x \geq 3$ 时, $2x-2 > 6$, 解得 $x > 4$.

综上所述, 不等式 $f(x) > 6$ 的解集为 $\{x | x > 4 \text{ 或 } x < -2\}$. (5分)

(2) 证明: 因为 $f(x) = |x+1| + |x-3| \geq |(x+1) - (x-3)| = 4$, 当且仅当 $(x+1)(x-3) \leq 0$ 时取等号,

所以 $f(x)$ 的最小值为 4, 即 $a+b+c = 4$. (6分)

因为 $a^2 + b^2 \geq 2ab, b^2 + c^2 \geq 2bc, a^2 + c^2 \geq 2ac$,

所以 $2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2ab + 2bc + 2ca$,

即 $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$, 当且仅当 $a = b = c = \frac{4}{3}$

时取等号, (8分)

所以 $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \geq 3(ab + bc + ca)$,

因为 $a+b+c = 4$, 所以 $ab + bc + ca \leq \frac{16}{3}$. (10分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线