

炎德·英才大联考雅礼中学 2023 届高三三月考试卷(四)

数学参考答案

一、二、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	D	C	A	D	C	C	D	ACD	CD	ABD	AD

1. C 【解析】集合 $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, 则集合 $C = \{3, 4, 5\}$, 集合元素个数为 3 个, 故集合 $C = \{z \mid z = x + y, x \in A, y \in B\}$ 的真子集个数为 $2^3 - 1 = 7$. 故选: C.

2. D 【解析】 $\because z(1+i) = 2, \therefore z = \frac{2}{1+i} = \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} = 1-i$, $\therefore$ 在复平面内复数 z 对应的点 $(1, -1)$ 位于第四象限. 故选: D.

3. C 【解析】由于 $N = 4^5 \cdot 9^{10} \Rightarrow \lg N = 5\lg 4 + 10\lg 9 = 10\lg 2 + 20\lg 3 \approx 12.552$, 所以 N 所在的区间为 $(10^{12}, 10^{13})$. 故选: C.

4. A 【解析】设 $5a + b = x(a-b) + y(a+b)$,

$$\text{可得} \begin{cases} x+y=5, \\ y-x=1. \end{cases} \text{解得} \begin{cases} x=2, \\ y=3. \end{cases}$$

因为 $2 \leq a-b \leq 4, 4 \leq a+b \leq 8$, 所以 $4 \leq 2(a-b) \leq 8, 12 \leq 3(a+b) \leq 24$,
所以 $16 \leq 2(a-b) + 3(a+b) \leq 32$, 即 $5a+b \in [16, 32]$, 故选: A.

5. D 【解析】据图可知, $A = 2$, 因为 $\triangle QAB$ 的面积是 $\triangle PAB$ 面积的 2 倍, 故 $P(0, 1)$,

$$\text{且 } \frac{T}{2} > \frac{5\pi}{3}, \text{ 可得 } 0 < \omega < \frac{3}{5},$$

$$\text{所以 } f(0) = 2\sin \varphi = 1, \text{ 故 } \sin \varphi = \frac{1}{2}, \text{ 又 } |\varphi| < \frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } \varphi = \frac{\pi}{6},$$

$$\text{结合 } f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 0, \text{ 即 } 2\sin\left(\frac{5\pi}{3}\omega + \frac{\pi}{6}\right) = 0, \text{ 故 } \frac{5\pi}{3}\omega - \frac{\pi}{6} = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{当 } k=0 \text{ 时, } \omega = \frac{1}{2}, \text{ 符合题意, 故 } f(x) = 2\sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6}\right),$$

$$\text{要求该函数的单调递增区间, 只需 } -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{解得 } -\frac{4\pi}{3} + 4k\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + 4k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{故单调递增区间为 } \left[4k\pi - \frac{4\pi}{3}, 4k\pi + \frac{2\pi}{3}\right], k \in \mathbb{Z}.$$

故选: D.

6. C 【解析】 $\because (1+2x-x^2)^n$ 展开式中各项系数的和为 $2^n = 64, \therefore n = 6$,

$$\therefore (1+2x-x^2)^6 \text{ 展开式中含 } x^3 \text{ 项为 } C_6^2 \cdot (2x)^2 \cdot 1^2 - C_6^1 \cdot (2x) \cdot (-x^2) \cdot 1^3 = 100x^3,$$

$\therefore$ 该展开式中的 x^3 项的系数为 100. 故选: C.

7. C 【解析】三棱锥 $A-BCD$ 中, P 为 $\triangle BCD$ 内一点, 如图所示:

延长 PB 至 B_1 , 使得 $PB_1 = 2PB$, 延长 PC 至 C_1 , 使得 $PC_1 = 3PC$,

连接 DB_1, B_1C_1, C_1D ,

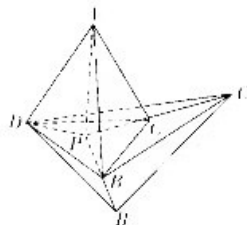
$$\text{因为 } S_{\triangle PBC} = 1, S_{\triangle PCD} = 2, S_{\triangle PBD} = 3, \text{ 所以 } S_{\triangle PB_1C_1} = S_{\triangle PCD} = S_{\triangle PBD},$$

$$\text{所以 } P \text{ 为 } \triangle B_1C_1D \text{ 的重心, 所以 } \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PB_1} + \overrightarrow{PC_1} = \mathbf{0},$$

$$\text{即 } \overrightarrow{PD} + 2\overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{PC} = \mathbf{0}, \text{ 所以 } (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AP}) + 2(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP}) + 3(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP}) = \mathbf{0},$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AD}. \text{ 故选: C.}$$

8. D 【解析】对于①, 因为 $e - \frac{c}{a} = \frac{5-1}{2}$, 所以 $c = \frac{5-1}{2}a$.





又 $b^2 = a^2 - c^2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a^2$, 故 $b^2 = ac$, 故①正确;

对于②, 如图, 由题可知 $|EB| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $|F_1B| = c + a$, $|F_1E| = \sqrt{b^2 + c^2} = a$,
又因为 $|F_1B|^2 = (a+c)^2 = a^2 + c^2 + 2ac = a^2 - c^2 + 2b^2 = 2a^2 + b^2$, $|EB|^2 =$
 $a^2 + b^2$, 所以 $|F_1B|^2 = |EB|^2 + |F_1E|^2$,

所以 $\triangle F_1EB$ 为直角三角形, 即 $\angle F_1EB = 90^\circ$, 故②正确;

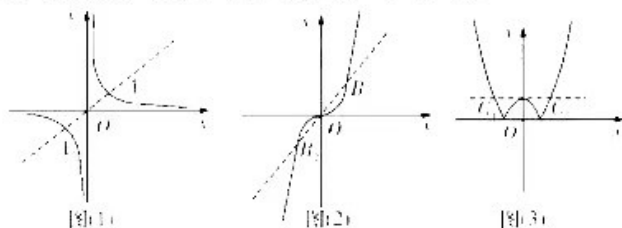
对于③, 如图所示, 设 EB 与内切圆相切于点 Q , 连接 OQ ,
由切线性质可知 $OQ \perp EB$,

$$\text{则 } |OQ| = \frac{|OE| \times |OB|}{|EB|} = \frac{b/a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\sqrt{a^3c}}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

将 $c = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a$, $b = \frac{\sqrt{5}+1}{2}a$ 代入上式, 可得 $|OQ| = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a - c$,

即内切圆半径为 c , 所以内切圆过两个焦点, 故③正确. 故选: D.

9. ACD 【解析】A 选择的两点关于原点对称即可, 如图(1)中的 A_1, A_2 ;



D 同 A, 选择的两点关于原点对称即可, 如图(2)中的 B_1, B_2 ;

C 如图(3)中的 C_1, C_2 , $y=1$ 与 $f(x)$ 的交点, 满足题意;

B 没有满足条件的点对, 假设存在 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 使得 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, 即 $\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 = \frac{x_1^2+x_2^2}{2}$, 得 $x_1 = x_2$, 与 $x_1 \neq x_2$ 矛盾, 故 B 不满足题意, 故选: ACD.

10. CD 【解析】对于 A 选项, 记事件 A_i, B_i 分别表示第一次、第二次取到 i 号球, $i=1, 2, 3$,

则第一次抽到 3 号球的条件下, 第二次抽到 1 号球的概率 $P(B_1|A_3) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, 故 A 错误;

对于 B 选项, 记事件 A_i, B_i 分别表示第一次、第二次取到 i 号球, $i=1, 2, 3$,

依题意 A_1, A_2, A_3 两两互斥, 其和为 Ω , 并且 $P(A_1) = \frac{2}{4}, P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{4}$,

所以 $P(B_1|A_1) = \frac{2}{4}, P(B_1|A_2) = \frac{2}{4}, P(B_1|A_3) = \frac{3}{6}$,

应用全概率公式, 有 $P(B_1) = \sum_{i=1}^3 P(A_i)P(B_1|A_i) = \frac{2}{4} \times \frac{2}{4} + \frac{2}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, 故 B 错误;

对于 C 选项, 依题设知, 第二次的球取自口袋的编号与第一次取的球上的号数相同,

$$\text{则 } P(A_1|B_1) = \frac{P(A_1) \cdot P(B_1|A_1)}{P(B_1)} = \frac{2}{4} \times \frac{2}{4} \times 2 = \frac{1}{2};$$

$$P(A_2|B_1) = \frac{P(A_2) \cdot P(B_1|A_2)}{P(B_1)} = \frac{1}{4} \times \frac{2}{4} \times 2 = \frac{1}{4};$$

$$P(A_3|B_1) = \frac{P(A_3) \cdot P(B_1|A_3)}{P(B_1)} = \frac{1}{4} \times \frac{3}{6} \times 2 = \frac{1}{4}.$$

故在第二次取到 1 号球的条件下, 它取自编号为 1 的口袋的概率最大, 故 C 正确;

对于 D 选项, 先将 5 个不同的小球分成 1, 1, 3 或 2, 2, 1 三份, 再放入三个不同的口袋, 则不同的分配方法有

$$\left(\frac{C_5^1 C_4^1 C_3^3}{A_3^3} + \frac{C_5^2 C_3^2 C_1^1}{A_3^3} \right) \cdot A_3^3 = 150, \text{ 故 D 正确. 故选: CD.}$$

11. ABD 【解析】对于 A, 设正方体的棱长为 1, 在正方体中 $\langle \overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AC} \rangle = 60^\circ$,

$$\text{则 } |\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB_1}| |\overrightarrow{AC}| \sin \langle \overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AC} \rangle = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3},$$



因为 $BD \parallel B_1D_1$, 且 $\angle AD_1B_1 = 60^\circ$, 所以 $\langle \overrightarrow{AD_1}, \overrightarrow{DB} \rangle = 120^\circ$,

$$\text{所以 } |\overrightarrow{AD_1} \times \overrightarrow{DB}| = |\overrightarrow{AD_1}| |\overrightarrow{DB}| \sin \langle \overrightarrow{AD_1}, \overrightarrow{DB} \rangle = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3},$$

所以 $|\overrightarrow{AB_1} \times \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD_1} \times \overrightarrow{DB}|$, 故 A 正确;

对于 C, 由 a, b 和 $a \times b$ 构成右手系知, $a \times b$ 与 $b \times a$ 方向相反,

由 $a \times b$ 模的定义知, $|a \times b| = |a| |b| \sin \langle a, b \rangle = |b| |a| \sin \langle a, b \rangle = |b \times a|$,

所以 $a \times b = -b \times a$, 则 $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AB}$, 故 C 错误;

对于 B, $A_1C_1 \perp B_1D_1, A_1C_1 \perp BB_1 \Rightarrow A_1C_1 \perp \text{平面 } BB_1D_1D$,

$BD_1 \subset \text{平面 } BB_1D_1D \Rightarrow BD_1 \perp A_1C_1$, 由题易得 $BD_1 \perp A_1D$,

由右手系知, $\overrightarrow{A_1C_1} \times \overrightarrow{A_1D}$ 与 $\overrightarrow{BD_1}$ 同向, 故 B 正确;

对于 D, 设正方体棱长为 a , $6|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{AC}| = 6|\overrightarrow{BC}| |\overrightarrow{AC}| \sin 45^\circ = 6a \cdot \sqrt{2}a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6a^2$,

正方体表面积为 $6a^2$, 故 D 正确. 故选: ABD.

12. AD 【解析】 $\because f(x) = \sin x - \sin(1-x), f(1-x) = \sin(1-x) + \sin x = f(x)$,

$\therefore f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{1}{2}$ 对称, 故 A 正确;

令 $x = \pi$, 求得 $f(x) = \sin \pi + \sin(1-\pi) = 0 - \sin 1 = -\sin 1 \neq 0$, 故 B 错误;

由 $f(x) = \sin x + \sin(1-x)$, 得 $f'(x) = \cos x - \cos(1-x)$,

$\because x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \therefore 1-x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, 可得 $0 \leq 1-x \leq x \leq 1 < \frac{\pi}{2}$,

而函数 $y = \cos x$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上为减函数, $\therefore f'(x) = \cos x - \cos(1-x) < 0$,

可得 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上单调递减, 故 C 错误;

$\because f(x) = \sin x + \sin(1-x) = 2\sin \frac{1}{2} \cos \frac{2x-1}{2}$,

又 $\frac{1}{2} < \frac{\pi}{6}, \therefore 2\sin \frac{1}{2} < 2\sin \frac{\pi}{6} = 1$, 可得 $f(x) = 2\sin \frac{1}{2} \cos \frac{2x-1}{2} < 1$, 故 D 正确. 故选: AD.

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. $\frac{\sqrt{6}}{4}$ 【解析】根据题意, 原图边长为 2 的正 $\triangle ABC$, 其面积 $S = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, 则其直观图 $\triangle A'B'C'$ 的

面积 $S' = \frac{\sqrt{2}}{4} \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

14. 90 【解析】 $\because$ 等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 3, 以数据 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{11}$ 为样本, 则此样本的平均数为 $\frac{1}{11}(a_1 + a_2 + \dots$

$+ a_{11}) = a_6$, $\therefore$ 此样本的方差为 $S^2 = \frac{1}{11}[(a_1 - a_6)^2 + (a_2 - a_6)^2 + \dots + (a_{11} - a_6)^2] = \frac{1}{11}(15^2 + 12^2 + \dots + 0^2 + \dots + 12^2 + 15^2) = 90$.

15. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 【解析】设双曲线 $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点为 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$,

由题意可得两曲线在第一象限的交点坐标为 $A(c, c)$, 易知四边形为正方形,

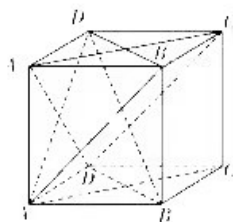
则 $|AF_2| = c, |AF_1| = \sqrt{c^2 + (2c)^2} = \sqrt{5}c$, 故 $|AF_1| - |AF_2| = (\sqrt{5} - 1)c = 2a$,

故双曲线的离心率 $e = \frac{2c}{2a} = \frac{2c}{(\sqrt{5}-1)c} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

16. $(-\infty, 0] \cup \left\{1 - \frac{1}{e}\right\}$ 【解析】方程 $x^2 e^{-x} = ax - \ln x - 1$ 可转化为 $\frac{x}{e^x} = a - \frac{\ln(xe^x)}{x}$ 存在唯一实数根,

令 $f(x) = \frac{x}{e^x}, x > 0, g(x) = -\frac{\ln(xe^x)}{x}, x > 0$,

由 $f'(x) = \frac{1-x}{e^x}$, 当 $x \in (0, 1), f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增,





当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

当 $x=1$ 时, $f(x)$ 取得极大值, 极大值为 $f(1) = \frac{1}{e}$,

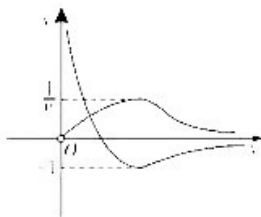
由 $g(x) = -ef(\ln(ex))$, 所以, 当 $x \in (0, 1)$, $g(x)$ 单调递减, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $g(x)$ 单调递增,

当 $x=1$ 时, $g(x)$ 取得极小值, 极小值为 $g(1) = -1$,

如图所示, 而 $g(x)$ 图象可由 $y = a - \frac{\ln(ex)}{x}$ 图象平移可得,

显然, $a \leq 0$ 或 $a = 1 + \frac{1}{e}$,

所以 a 的取值范围为 $(-\infty, 0] \cup \{1 + \frac{1}{e}\}$.



四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 【解析】(1) 因为 $\sin(A+C)\cos B = \sqrt{3}\cos^2 B - \frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以 $\sin B\cos B = \sqrt{3}(\frac{1}{2} + \cos 2B) - \frac{\sqrt{3}}{2}$,

整理得 $\frac{1}{2}\sin 2B - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2B = 0$, 所以 $\tan 2B = \sqrt{3}$,

因为 B 为锐角, 所以 $B = \frac{\pi}{6}$ 5 分

(2) 由 (1) 可知 $B = \frac{\pi}{6}$, 根据余弦定理得 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$,

整理得 $1 = a^2 + c^2 - \sqrt{3}ac \geq (2 - \sqrt{3})ac$, 即 $ac \leq \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$,

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac\sin \frac{\pi}{6} \leq \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$.

即 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\frac{2 + \sqrt{3}}{4}$ 10 分

18. 【解析】(1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ($d \neq 0$), $a_1 = 1$,

若 a_1, a_2, a_5 成等比数列, 可得 $1 \times (1 + 4d) = (1 + d)^2$,

解得 $d = 2$ 或 $d = 0$ (舍去), 则 $a_n = 1 + 2(n-1) = 2n-1$ 6 分

(2) $b_n = \frac{1}{a_{n+1}^2 - 1} - 3^n = \frac{1}{(2n+1)^2 - 1} - 3^{2n-1} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + 3^{2n-1}$, 8 分

可得数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + (3^1 - 3^3 + \dots + 3^{2n-1})$

$= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{3(1-9^n)}{1-9} = \frac{n}{4n+4} + \frac{3}{8}(9^n - 1)$ 12 分

19. 【解析】(1) 证明: 在等腰梯形 $ABCD$ 中,

$\because AB \parallel CD, DE \perp AB, AB = 5, CD = 3, \angle DAB = \frac{\pi}{3}$,

$\therefore AE = 1, AD = BC = 2, DE = \sqrt{3}, CE = \sqrt{3-9} = 2\sqrt{3}, BE = 4$,

$\therefore CE^2 + BC^2 = BE^2, \therefore BC \perp EC$,

$\because$ 沿 DE 将等腰梯形折成直二面角, $\therefore AE \perp$ 平面 $BCDE$,

$\because BCC \subset$ 平面 $BCDE, \therefore BC \perp AE$,

$\because AE \cap CE = E, \therefore BC \perp$ 平面 ACE 6 分

(2) 解: 以 E 为原点, EB 为 x 轴, ED 为 y 轴, EA 为 z 轴, 建立空间直角坐标系,

由已知得 $A(0, 0, 1), B(4, 0, 0), C(3, \sqrt{3}, 0)$,

$\overrightarrow{AB} = (4, 0, -1), \overrightarrow{AC} = (3, \sqrt{3}, -1)$.



设平面 ABC 的法向量 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 4x - z = 0,$$

$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 3x + 3y - z = 0,$$



取 $x=1$, 得 $\mathbf{n} = (1, \frac{3}{3}, 4)$, 8 分

又平面 ADE 的法向量 $\mathbf{m} = (1, 0, 0)$, 10 分

设平面 ADE 与平面 ABC 所成二面角的平面角为 θ ,

$$\cos \theta = |\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{3} + 16}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{19}{3}}} = \frac{\sqrt{39}}{26}.$$

∴ 平面 ADE 与平面 ABC 所成二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{39}}{26}$ 12 分

20. 【解析】(1) 由样本频率分布直方图得, 样本中获一等奖的有 6 人, 获二等奖的有 8 人, 获三等奖的有 16 人, 共有 30 人获奖, 70 人没有获奖, 从该样本中随机抽取两名学生的竞赛成绩, 基本事件总数为 C_{100}^2 ,

设“抽取的两名学生中恰有一名学生获奖”为事件 A , 则事件 A 包含的基本事件的个数为 $C_{30}^1 C_{70}^1$,

因为每个基本事件出现的可能性都相等, 所以 $P(A) = \frac{C_{30}^1 C_{70}^1}{C_{100}^2} = \frac{14}{33}$, 4 分

即抽取的两名学生中恰有一名学生获奖的概率为 $\frac{14}{33}$.

(2) 由样本频率分布直方图得样本平均数的估计值 $\mu = 35 \times 0.006 \times 10 + 45 \times 0.012 \times 10 + 55 \times 0.018 \times 10 + 65 \times 0.034 \times 10 + 75 \times 0.016 \times 10 + 85 \times 0.008 \times 10 + 95 \times 0.006 \times 10 = 64$,

则所有参赛学生的成绩 X 近似服从正态分布 $N(64, 15^2)$ 6 分

(i) 因为 $\mu + \sigma = 79$, 所以 $P(X > 79) \approx \frac{1 - 0.6827}{2} = 0.15865$, 8 分

故参赛学生中成绩超过 79 分的学生数为 $0.15865 \times 10000 \approx 1587$.

(ii) 由 $\mu = 64$, 得 $P(X > 64) = \frac{1}{2}$, 即从所有参赛学生中随机抽取 1 名学生, 该生竞赛成绩在 64 分以上的概率为 $\frac{1}{2}$, 所以随机变量 ξ 服从二项分布 $\xi \sim B(3, \frac{1}{2})$,

$$\text{所以 } P(\xi=0) = C_3^0 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}, P(\xi=1) = C_3^1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}, P(\xi=2) = C_3^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}, P(\xi=3) = C_3^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8},$$

所以随机变量 ξ 的分布列为:

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

..... 10 分

均值 $E(\xi) = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$ 12 分

21. 【解析】(1) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 依题意, 知直线 AB 的方程为 $y = x \tan 45^\circ + 1$, 即 $y = x + 1$,

将它代入抛物线 H 的方程中, 并整理得 $x^2 - 2px - 2p = 0$.

由韦达定理得 $x_1 + x_2 = 2p, x_1 x_2 = -2p$, 其 $\Delta = 4p^2 + 8p > 0$ 对 $p > 0$ 恒成立,

由弦长公式得 $|AB| = \sqrt{2}[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2] = 8\sqrt{3}$,

化简得 $p^2 + 2p - 24 = 0$ 且 $p > 0$, 解得 $p = 4$.

故抛物线 H 的方程为 $x^2 = 8y$ 4 分

(2) 设 $C(x_3, y_3), D(x_4, y_4)$,

$$x^2 = 8y,$$

$$\begin{cases} x^2 = 8y \\ y = \frac{1}{2}x + n \end{cases} \text{ 得 } x^2 - 4x - 8n = 0,$$



$$\because \Delta - (-4)^2 - 4 \times (-8n) - 16 + 32n > 0, \therefore n > -\frac{1}{2} \text{ 且 } n \neq 0,$$

$$\text{故 } x_3 + x_4 = 4, x_3 x_4 = -8n, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

由(1)得 $F(0, 2)$, 依题意知 $\angle CFD = 90^\circ$, 即 $\vec{FC} \cdot \vec{FD} = 0$,

$$\vec{FC} = (x_3, y_3 - 2), \vec{FD} = (x_4, y_4 - 2),$$

$$\text{即 } x_3 x_4 + (y_3 - 2)(y_4 - 2) = 0, \textcircled{1} \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{又 } C, D \text{ 在直线 } l \text{ 上}, \therefore y_3 = \frac{1}{2}x_3 + n, y_4 = \frac{1}{2}x_4 + n,$$

$$\text{代入 } \textcircled{1} \text{ 式得 } x_3 x_4 + \left(\frac{1}{2}x_3 + n - 2\right)\left(\frac{1}{2}x_4 + n - 2\right) = 0,$$

$$\text{整理得 } \frac{5}{4}x_3 x_4 + \frac{1}{2}(n-2)(x_3 + x_4) + (n-2)^2 = 0,$$

$$\text{又 } x_3 + x_4 = 4, x_3 x_4 = -8n, \text{ 代入得 } n^2 - 12n = 0, \text{ 又 } n \neq 0, \text{ 解得 } n = 12, \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{设圆心 } G(x_0, y_0), \text{ 则 } x_0 = \frac{x_3 + x_4}{2} = \frac{4}{2} = 2, y_0 = \frac{1}{2}x_0 + n = 1 + 12 = 13,$$

$$\therefore \text{圆心 } G(2, 13), r = |GF| = \sqrt{(2-0)^2 + (13-2)^2} = 5\sqrt{5},$$

$$\therefore \text{圆 } G \text{ 的面积为 } \pi r^2 = \pi(5\sqrt{5})^2 = 125\pi. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

22. 【解析】(1) $g(x) = b(x - \sqrt{x}) = b\left[\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] (b > 0),$

二次函数 $r(\sqrt{x}) = g(x)$ 的图象开口向上, 且 $\sqrt{x} \geq 0$,

$$\therefore g(x)_{\min} = g\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}b, \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

函数 $f(x)$ 定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = a \ln x + a$, 由 $f'(x) = 0$ 得 $x = e^{-1}$,

① 则当 $a > 0$ 时, 由 $f'(x) > 0$ 得 $x > e^{-1}$, 由 $f'(x) < 0$ 得 $0 < x < e^{-1}$,

$\therefore f(x)$ 在 $(0, e^{-1})$ 上单调递减, 在 $(e^{-1}, +\infty)$ 上单调递增,

$$\therefore \text{当 } x = e^{-1} \text{ 时}, f(x) \text{ 取得极小值也是最小值}, f(x)_{\min} = f(e^{-1}) = -ae^{-1}, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$\therefore$ 函数 $f(x) = ax \ln x$ 和 $g(x) = b(x - \sqrt{x}) (b > 0)$ 有相同的最小值,

$$\therefore -\frac{1}{4}b = -ae^{-1}, \text{ 解得 } a = \frac{eb}{4} (b > 0),$$

$$\therefore a + \frac{1}{b} = \frac{eb}{4} + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{eb}{4} \cdot \frac{1}{b}} = \sqrt{e}, \text{ 当且仅当 } \frac{eb}{4} = \frac{1}{b}, \text{ 即 } b = \frac{2\sqrt{e}}{e} \text{ 时, 等号成立; } \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

② 当 $a = 0$ 时, $f(x) = 0$, 此时不符合题意;

③ 当 $a < 0$ 时, 由 $f'(x) < 0$ 得 $x > e^{-1}$, 由 $f'(x) > 0$ 得 $0 < x < e^{-1}$,

$\therefore f(x)$ 在 $(0, e^{-1})$ 上单调递增, 在 $(e^{-1}, +\infty)$ 上单调递减, 此时 $f(x)$ 无最小值, 不符合题意,

$$\text{综上所述}, a + \frac{1}{b} \text{ 的最小值为 } \sqrt{e}. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 证明: 由 (1) 知 } a = \frac{eb}{4}, \text{ 则 } f(x) = \frac{eb}{4}x \ln x,$$

$$\therefore h(x) = \frac{eb}{4}x \ln x + b(x - \sqrt{x}) (x > 0), h'(x) = \frac{eb}{4}(\ln x + 1) + b\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right),$$

$$\text{令 } H(x) = \frac{eb}{4}(\ln x + 1) + b\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) (x > 0), \text{ 则 } H'(x) = \frac{eb}{4} \cdot \frac{1}{x} + \frac{b}{4}x^{-\frac{3}{2}} > 0 \text{ 恒成立,}$$

$\therefore H(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 即 $h'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

$$\text{又 } h'(e^{-2}) = \frac{eb}{4}(\ln e^{-2} + 1) - b\left(1 - \frac{1}{2}\right) = b\left(1 - \frac{3e}{4}\right) < 0, h'(1) = \frac{eb}{4} + \frac{b}{2} > 0,$$

由零点存在性定理得存在 $x_0 \in (e^{-2}, 1)$, 使得 $h'(x_0) = 0$,

$\therefore h(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增,

又 $h(1) = 0$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $h(x) \rightarrow 0$, 则当 $x \in (0, 1)$ 时, $h(x) < 0$,

方程 $h(x) = m$ 有两个不相等的实根 x_1, x_2 , 不妨设 $x_1 < x_2$.



则 $0 < x_1 < x_2 < 1$, 则 $x_1 + x_2 < 2$, 9 分

下面只需证 $x_1 + x_2 > \frac{1}{2}$,

由题意得 $h(x_1) - h(x_2) = m$, 则 $\frac{eb}{4} x_1 \ln x_1 + b(x_1 - \sqrt{x_1}) - \frac{eb}{4} x_2 \ln x_2 + b(x_2 - \sqrt{x_2}) = m$,

$$\text{即 } (x_1 - \sqrt{x_1}) \left(\frac{e}{4} \cdot \frac{\sqrt{x_1} \ln x_1}{\sqrt{x_1} - 1} + 1 \right) = (x_2 - \sqrt{x_2}) \left(\frac{e}{4} \cdot \frac{\sqrt{x_2} \ln x_2}{\sqrt{x_2} - 1} + 1 \right) = \frac{m}{b},$$

令 $m(x) = \frac{\sqrt{x} \ln x}{\sqrt{x} - 1}$, $x \in (0, 1)$, 令 $t = \sqrt{x}$, 则 $t \in (0, 1)$,

$$\text{则 } m(t) = \frac{2t \ln t}{t-1}, \text{ 则 } m'(t) = \frac{2(\ln t + 1)(t-1)}{(t-1)^2} - \frac{2t \ln t}{(t-1)^2} = \frac{2(t-1-\ln t)}{(t-1)^2},$$

令 $n(t) = t - 1 - \ln t$ ($0 < t < 1$), 则 $n'(t) = 1 - \frac{1}{t} < 0$ 成立,

$\therefore n(t)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, $n(t) > n(1) = 0$,

$\therefore m'(t) > 0$ 成立, 即 $m(t)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 也即 $m(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增,

$\therefore m(x_2) > m(x_1) > 0$, 又 $x_2 - \sqrt{x_2} < 0$,

$$\therefore (x_1 - \sqrt{x_1}) \left(\frac{e}{4} \cdot \frac{\sqrt{x_1} \ln x_1}{\sqrt{x_1} - 1} + 1 \right) = (x_2 - \sqrt{x_2}) \left(\frac{e}{4} \cdot \frac{\sqrt{x_2} \ln x_2}{\sqrt{x_2} - 1} + 1 \right) < (x_2 - \sqrt{x_2}) \left(\frac{e}{4} \cdot \frac{\sqrt{x_1} \ln x_1}{\sqrt{x_1} - 1} + 1 \right),$$

$\therefore x_1 - \sqrt{x_1} < x_2 - \sqrt{x_2}$, 即 $x_1 - x_2 < \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}$, 即 $(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1})(\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}) > \sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}$,

$$\therefore \sqrt{x_2} + \sqrt{x_1} > 1, \therefore x_1 + x_2 > 2 \left(\frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}{2} \right)^2 > \frac{1}{2},$$

综上所述, $\frac{1}{2} < x_1 + x_2 < 2$ 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线