

2023 年普通高等学校招生全国统一考试

青桐鸣大联考(高三)

数学(新教材版)答案

1. D 解析: 因为 $M = \{x | -5 < x < 1\}$, $N = \{x | x^2 - 4 < 0\} = \{x | -2 < x < 2\}$, 所以 $M \cup N = \{x | -5 < x < 2\}$, 故选 D.

2. A 解析: 由 $(z+4)i=3$ 得, $z+4=\frac{3}{i}=-3i$, 所以 $z=-4-3i$, 则 $\bar{z}=-4+3i$, 则 $\bar{z}$ 的虚部为 3, 故选 A.

3. C 解析: 由题意, 得 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = a + \frac{1}{2}b$. 故选 C.

4. D 解析: 由题意可知, 在事件 M 发生时, 从二年级组随机抽取 1 人, 有 5 种可能情况, 其中抽取的是 1 名女生有 2 种可能情况, 所以 $P(N|M) = \frac{2}{5}$, A 错误; 其中抽取的是 1 名男生有 3 种可能情况, 所以 $P(\bar{N}|M) = \frac{3}{5}$, B 错误; 在 $\bar{M}$ 发生时, 从二年级组随机抽取 1 人, 有 5 种可能情况, 其中抽取的是 1 名女生有 3 种可能情况, 所以 $P(N|\bar{M}) = \frac{3}{5}$, C 错误; 其中抽取的是 1 名男生有 2 种可能情况, 所以 $P(\bar{N}|\bar{M}) = \frac{2}{5}$, D 正确. 故选 D.

5. D 解析: 由题意, 圆 $C_1: x^2 + y^2 - 2ax - 1 = 0$ 可化为 $C_1: (x-a)^2 + y^2 = a^2 + 1$, 其圆心为 $(a, 0)$, 半径为 $\sqrt{a^2 + 1}$; 圆 $C_2: x^2 + y^2 - 2y - b = 0$ 可化为 $C_2: x^2 + (y-1)^2 = b+1$, 其圆心为 $(0, 1)$, 半径为 $\sqrt{b+1}$, 由题意可知, $\begin{cases} a^2 + 1 = b + 1, \\ \frac{1-0}{0-a} = -1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=1, \\ b=1, \end{cases}$ 则 $a+b=2$. 故选 D.

6. A 解析: $(x-4y)\left(x-\frac{1}{y}\right)^5 = x\left(x-\frac{1}{y}\right)^5 - 4y\left(x-\frac{1}{y}\right)^5$.

$\left(x-\frac{1}{y}\right)^5$ 的二项展开式的通项为 $T_{r+1} = C_5^r x^{5-r} \left(-\frac{1}{y}\right)^r = (-1)^r C_5^r x^{5-r} y^{-r}$,

所以 $(x-4y)\left(x-\frac{1}{y}\right)^5$ 的展开式中 xy^{-3} 项的

系数为 $-4 \times (-1) \times C_5^1 = -20$. 故选 A.

7. B 解析: 因为 $T = \frac{2\pi}{\omega}$, 则 $\frac{T}{4} = \frac{2\pi}{4\omega} = \frac{\pi}{2\omega}$, 由

$f\left(\frac{T}{4}\right) = -\frac{3}{2}$ 得,

$3\cos\left(\omega \times \frac{\pi}{2\omega} - \varphi\right) = 3\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = -3\sin \varphi =$

$-\frac{3}{2}$, 所以 $\sin \varphi = \frac{1}{2}$, 又 $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, 所以

$\varphi = \frac{\pi}{6}$,

由 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -3$ 可知, 当 $x = \frac{\pi}{4}$ 时, $f(x)$ 取得最

小值, 所以 $\frac{\omega\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}$,

则 $\omega = 8k + \frac{10}{3}, k \in \mathbb{Z}$, 所以 ω 的最小值为

$\frac{10}{3}$. 故选 B.

8. B 解析: 设球 O 的半径为 R , 由球 O 的表面积为 32π 可知, $4\pi R^2 = 32\pi$, 解得 $R = 2\sqrt{2}$.

设该正六棱锥底面边长为 a , 其高为 h ,

易知底面正六边形的外接圆的半径为 a ,

所以 $a^2 + h^2 = 8$, 所以 $a^2 = 8 - h^2$,

由 $a^2 = 8 - h^2 > 0$ 得, $0 < h < 2\sqrt{2}$.

正六棱锥的体积为 $V = \frac{1}{3} \times 6 \times \frac{1}{2} a^2 \sin 60^\circ \times$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 h = \frac{\sqrt{3}}{2} (8 - h^2) h = \frac{\sqrt{3}}{2} (8h - h^3),$$

令 $f(x) = 8x - x^3$ ($0 < x \leq 2\sqrt{2}$), 则 $f'(x) = 8 - 3x^2 = 0$, 解得 $x = \frac{2}{3}\sqrt{6}$,

当 $x \in (0, \frac{2}{3}\sqrt{6})$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x \in (\frac{2}{3}\sqrt{6}, 2\sqrt{2})$ 时, $f'(x) < 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{2}{3}\sqrt{6})$ 上单调递增, 在 $(\frac{2}{3}\sqrt{6}, 2\sqrt{2})$ 上单调递减,

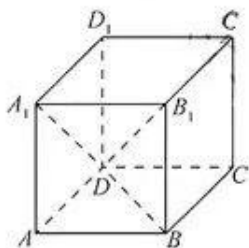
当 $x = \frac{2}{3}\sqrt{6}$ 时, $f(x)$ 取得极大值也是最大值,

即当 $h = \frac{2}{3}\sqrt{6}$ 时, V 取得最大值, 此时 $a^2 = 8 - h^2 = \frac{16}{3}$,

所以底面面积为 $S = 6 \times \frac{1}{2} a^2 \sin 60^\circ = 8\sqrt{3}$, 故选 B.

9. ACD 解析: 由条形图可知甲积分的众数为 30, 乙积分的众数为 20, A 正确; 甲积分的波动比较大, 乙积分的波动比较小, 所以甲积分的方差大于乙积分的方差, B 错误; 乙积分大于 30 分的概率为 $\frac{3}{5} = 0.6$, C 正确; 甲积分大于 30 分的概率为 $\frac{2}{5} = 0.4$, D 正确. 故选 ACD.

10. BC 解析: 因为 $CC_1 \parallel BB_1$, 所以 $\angle BB_1D$ 或其补角为 B_1D 与 CC_1 所成的角, 如图, 连接 BD ,



由长方体的性质可知, $BB_1 \perp$ 平面 $ABCD$, 所

设 $B_1D = 2$, 则 $BB_1 = B_1D \cdot \cos 60^\circ = 1$, $BD = B_1D \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}$.

因为 $C_1D_1 \parallel A_1B_1$, 所以 $\angle A_1B_1D$ 或其补角为 B_1D 与 C_1D_1 所成的角,

连接 A_1D , 易知 $A_1B_1 \perp A_1D$, 则 $\angle A_1B_1D = 60^\circ$, 所以 $AB = A_1B_1 = B_1D \cdot \cos 60^\circ = 1$, $A_1D = B_1D \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}$,

则 $A_1B_1 = BB_1$, 所以 $AB = AA_1$, A 错误;

在 $Rt\triangle ABD$ 中, $AD = \sqrt{BD^2 - AB^2} = \sqrt{2}$, 则 $AD = \sqrt{2}AB$, B 正确;

$AC_1 = B_1D = \frac{2}{\sqrt{3}}BD = \frac{2\sqrt{3}}{3}BD$, C 正确; $AC =$

$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}BC = \frac{\sqrt{6}}{2}BC$, D 错误. 故选 BC.

11. AD 解析: 因为函数 $y = f\left(\frac{3}{2}x - 2\right) - 1$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,

所以 $f\left(\frac{3}{2}x - 2\right) - 1 = -\left[f\left(-\frac{3}{2}x - 2\right) - 1\right]$,

即 $f\left(\frac{3}{2}x - 2\right) + f\left(-\frac{3}{2}x - 2\right) = 2$, 所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(2, 1)$ 对称, 则 $f(2) = 1$.

又 $f(3) = -1$, 所以 $f(1) = 3$, A 正确;

将函数 $y = f(x + 2) - 1$ 图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{2}{3}$ (纵坐标不变), 得到函数

$y = f\left(\frac{3}{2}x + 2\right) - 1$ 的图象,

又函数 $y = f\left(\frac{3}{2}x + 2\right) - 1$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的周期为 2 的函数, 所以 $y = f(x + 2) - 1$ 的周期为 3,

因为平移变换不改变函数的周期, 所以 $f(x)$ 的周期为 3, B 错误;

所以 $f(2024) = f(674 \times 3 + 2) = f(2) = 1$, C 错误;

则 $\sum_{k=1}^{17} f(k) = 5[f(1) + f(2) + f(3)] + f(1) +$

咨询热线: 010-5601 9830

微信客服: zizzs2018

12. BCD 解析: 因为 $F_1(-c, 0)$, $PF_1 \perp F_1F_2$, 所以将 $x = -c$ 代入 C 的方程, 可得 $P(-c, \frac{b^2}{a})$,

则 $|PF_1| = \frac{b^2}{a}$, 由双曲线的定义可知,

$$|PF_2| = 2a + \frac{b^2}{a}.$$

因为 l 在 y 轴上的截距为 $-\frac{b^2}{3a}$, 所以 $k_l =$

$$\frac{\frac{b^2}{a} + \frac{b^2}{3a}}{-c - 0} = -\frac{4b^2}{3ac},$$

则直线 l 的方程为 $y = -\frac{4b^2}{3ac}x - \frac{b^2}{3a}$,

令 $y = 0$, 得 $x = -\frac{c}{4}$.

设直线 l 与 x 轴的交点为 M , 则 $|MF_1| = \frac{3}{4}c$,

$$|MF_2| = \frac{5}{4}c.$$

因为直线 PF_1 与直线 PF_2 关于直线 l 对称, 所以直线 l 为 $\angle F_1PF_2$ 的平分线,

则 $\angle F_1PM = \angle F_2PM$,

根据角平分线定理得 $\frac{|PF_1|}{|PF_2|} = \frac{|MF_1|}{|MF_2|}$, 所以

$$\frac{\frac{b^2}{a}}{2a + \frac{b^2}{a}} = \frac{\frac{3}{4}c}{\frac{5}{4}c},$$

整理得 $b^2 = 3a^2$, 所以 C 的两渐近线的方程为 $y = \pm\sqrt{3}x$, 它们的倾斜角分别为 60° 和 120° , 则 C 的两渐近线中倾斜角较小的为 60° , A 错误; 来源: 高三答案公众号

C 的离心率为 $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = 2$, B 正确;

当 $|F_1F_2| = 4$ 时, $c = 2$, 则 $a = 1$, 则 $b^2 = c^2 - a^2 = 3$, 所以 C 的方程为 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$, C 正确;

易知 $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, 设 $N(x_0, y_0)$, 则 $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$, 所以 $\frac{x_0^2 - a^2}{a^2} = \frac{y_0^2}{b^2}$, 即 $\frac{y_0^2}{x_0^2 - a^2} = \frac{b^2}{a^2}$,

$$k_{A_1N} \cdot k_{A_2N} = \frac{y_0}{x_0 + a} \cdot \frac{y_0}{x_0 - a} = \frac{y_0^2}{x_0^2 - a^2} = \frac{b^2}{a^2} =$$

3, D 正确. 故选 BCD.

13. $y^2 = 20x$ (或 $y^2 = -4x$ 或 $x^2 = 4\sqrt{5}y$ 或 $x^2 = -4\sqrt{5}y$ 其中一个即可)

解析: 若 C 的焦点在 x 轴上, 令 $y = 0$ 得 $(x-2)^2 = 9$, 解得 $x_1 = 5, x_2 = -1$,

所以焦点 F 的坐标为 $(5, 0)$ 或 $(-1, 0)$, 此时抛物线 C 的方程为 $y^2 = 20x$ 或 $y^2 = -4x$;

若 C 的焦点在 y 轴上, 令 $x = 0$ 得 $y^2 = 5$, 解得 $y_1 = \sqrt{5}$ 或 $y_2 = -\sqrt{5}$,

所以焦点 F 的坐标为 $(0, \sqrt{5})$ 或 $(0, -\sqrt{5})$, 此时抛物线 C 的方程为 $x^2 = 4\sqrt{5}y$ 或 $x^2 = -4\sqrt{5}y$.

14. $\frac{3}{16}$ 解析: 由题意可知, 该项关键指标在区间

$[2, +\infty)$ 上口罩的包数 $X \sim B(5, \frac{1}{2})$, 所以这

5 包口罩中至少有 4 包口罩该项关键指标在区间 $[2, +\infty)$ 上的概率 $P = C_5^4 (\frac{1}{2})^4 \times$

$$(1 - \frac{1}{2}) + C_5^5 (\frac{1}{2})^5 = \frac{3}{16}.$$

15. $\frac{121}{9}$ 解析: 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ,

由条件可知, $\frac{1}{a_2} (1 - \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2}) = \frac{7}{3}$,

$$\frac{1}{a_3} (1 + \frac{1}{q^3}) = 28,$$

两式相除得, $\frac{1}{q} (1 + \frac{1}{q}) = 12$,

$$\text{所以 } \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q} - 12 = 0,$$

解得 $\frac{1}{q} = 3$ 或 $\frac{1}{q} = -4$ (舍去), 则 $q = \frac{1}{3}$,

将 $\frac{1}{q} = 3$ 代入 $\frac{1}{a_2} (1 - \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2}) = \frac{7}{3}$ 中得 $\frac{1}{a_2} =$

$$\frac{1}{3}, \text{ 所以 } \frac{1}{a_1 q} = \frac{1}{3}, \text{ 解得 } a_1 = 9,$$

所以 $\{a_n\}$ 的前 5 项和 $S_5 = \frac{a_1(1-q^5)}{1-q} = \frac{9 \times \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^5\right]}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{27}{2} - \frac{27}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{121}{9}$.

16. $(e^{-\frac{1}{e}}, 1)$ 解析: $f'(x) = x^3 + a'$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$), 由题意可知, 方程 $a' = -x^3$ 有两个不同的解 x_1, x_2 . 来源: 高三答案公众号
因为 $x_1 < x_2 < 0$, 所以 $0 < a < 1$,

对 $a = -x^3$ 两边取对数得, $x \ln a = 3 \ln(-x)$,
令 $g(x) = x \ln a - 3 \ln(-x)$ ($x < 0$), 则

$$g'(x) = \ln a - \frac{3}{x} = \frac{\left(x - \frac{3}{\ln a}\right) \times \ln a}{x},$$

当 $x = \frac{3}{\ln a}$ 时, $g'(x) = 0$,

当 $x < \frac{3}{\ln a}$ 时, $g'(x) < 0$, 当 $x > \frac{3}{\ln a}$ 时, $g'(x) > 0$,

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty, \frac{3}{\ln a})$ 单调递减, 在 $(\frac{3}{\ln a}, 0)$ 上单调递增,

$$g(x)_{\min} = g\left(\frac{3}{\ln a}\right) = 3 - 3 \ln\left(-\frac{3}{\ln a}\right),$$

又当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $g(x) \rightarrow -\infty$; 当 $x \rightarrow 0$ 时, $g(x) \rightarrow +\infty$,

故要使 $g(x)$ 有两个零点, 只需使 $3 - 3 \ln\left(-\frac{3}{\ln a}\right) < 0$, 即 $\ln\left(-\frac{3}{\ln a}\right) > 1 = \ln e$,

所以 $-\frac{3}{\ln a} > e$, 解得 $a > e^{-\frac{3}{e}}$, 故实数 a 的取值范围为 $(e^{-\frac{3}{e}}, 1)$.

17. 解: (1) 由 $\cos(A-C) = \cos B - \cos C$ 得,
 $\cos(A-C) = -\cos(A+C) - \cos C$,
所以 $\cos A \cos C + \sin A \sin C = -\cos A \cdot \cos C + \sin A \sin C - \cos C$,
则 $2 \cos A \cos C = -\cos C$,

又 C 为锐角, 所以 $\cos C \neq 0$, 则 $\cos A = -\frac{1}{2}$,

所以 $A = \frac{2\pi}{3}$.

(2) 由条件与正弦定理得, $a = \sqrt{3}c$,

则 $a > c$, 所以 C 为锐角, 则由 (1) 可知, $A = \frac{2\pi}{3}$.

由余弦定理得, $(\sqrt{3}c)^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \left(-\frac{1}{2}\right)$,

所以 $2c^2 - c - 1 = 0$,

解得 $c = 1$ 或 $c = -\frac{1}{2}$ (舍去),

所以 $a = \sqrt{3}$,

故 $\triangle ABC$ 的周长为 $2 + \sqrt{3}$.

18. 解: (1) 由 $S_n = n^2 a_n$ ①得,

当 $n \geq 2$ 时, $S_{n-1} = (n-1)^2 a_{n-1}$ ②,

①-②得, $S_n - S_{n-1} = n^2 a_n - (n-1)^2 a_{n-1}$,

即 $a_n = n^2 a_n - (n-1)^2 a_{n-1}$ ($n \geq 2$),

整理得, $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n-1}{n+1}$ ($n \geq 2$),

所以当 $n \geq 2$ 时, $a_n = \frac{a}{a_{n-1}} \times \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \times \cdots \times \frac{a}{a} \times$

$$a \cdot \frac{n-1}{n+1} = \frac{n-2}{n} \times \frac{n-3}{n-1} \times \cdots \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

当 $n=1$ 时, $a_1 = \frac{1}{2}$ 满足 $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$,

故 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$.

(2) 证明: 由 (1) 可知, $b_n = (n+1) a_n a_{n+1} =$

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right],$$

所以 $T_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n =$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3} - \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right] = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} < \frac{1}{4}.$$

19. 解: (1) 估计男生评分的平均值为 $\bar{x}_1 = \frac{10}{100} \times$

$$65 + \frac{20}{100} \times 75 + \frac{40}{100} \times 85 + \frac{30}{100} \times 95 = 84;$$

估计女生评分的平均值为 $\bar{x}_2 = \frac{20}{100} \times 65 +$

$$\frac{30}{100} \times 75 + \frac{30}{100} \times 85 + \frac{20}{100} \times 95 = 80.$$

故估计男生、女生评分的平均值分别为 84 和 80.

(2) 根据所给数据, 得到如下 2×2 列联表:

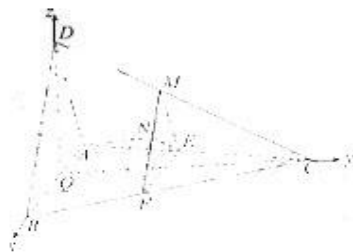
	满意	不满意	合计
男生	70	30	100
女生	50	50	100
合计	120	80	200

$$\chi^2 = \frac{200 \times (70 \times 50 - 30 \times 50)^2}{100 \times 100 \times 120 \times 80} = \frac{25}{3} \approx 8.333,$$

因为 $8.333 > 6.635$,

故有 99% 的把握认为男生、女生评分有差异.

20. 解: (1) 证明: 连接 EF, ME , 如图,



因为点 E, M 分别为 AC, CD 的中点, 所以 $ME \parallel DA$.

又 $ME \not\subset$ 平面 $ABD, DA \subset$ 平面 ABD ,

所以 $ME \parallel$ 平面 ABD .

同理 $EF \parallel$ 平面 ABD .

因为 $ME \cap EF = E, ME, EF \subset$ 平面 EFM , 所以平面 $EFM \parallel$ 平面 ABD .

因为 $NE \subset$ 平面 EFM ,

所以 $NE \parallel$ 平面 ABD .

(2) 取 AB 的中点 Q , 连接 CQ, DQ .

因为 $\triangle ABD, \triangle ABC$ 均为等边三角形, 所以 $DQ \perp AB, CQ \perp AB$.

因为平面 $ABD \perp$ 平面 ABC , 平面 $ABD \cap$ 平面 $ABC = AB, DQ \subset$ 平面 ABD ,

所以 $DQ \perp$ 平面 $ABC, CQ \subset$ 平面 ABC , 所以 $DQ \perp CQ$.

以 Q 为坐标原点, 以 QB, QC, QD 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立空间直角坐标系

$Q-xyz$,

设 $AB = 2$, 则 $A(-1, 0, 0), B(1, 0, 0)$,

$C(0, \sqrt{3}, 0), D(0, 0, \sqrt{3}), N\left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, 则

$$\overrightarrow{BC} = (-1, \sqrt{3}, 0), \overrightarrow{CD} = (0, -\sqrt{3}, \sqrt{3}), \overrightarrow{AN} = \left(\frac{5}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

设平面 BCD 的一个法向量为 $m = (x, y, z)$,

$$\text{由} \begin{cases} \overrightarrow{BC} \cdot m = 0, \\ \overrightarrow{CD} \cdot m = 0, \end{cases} \text{得} \begin{cases} -x + \sqrt{3}y = 0, \\ -\sqrt{3}y + \sqrt{3}z = 0, \end{cases}$$

取 $x = \sqrt{3}$ 得 $m = (\sqrt{3}, 1, 1)$,

设直线 AN 与平面 BCD 所成的角为 θ ,

$$\text{则} \sin \theta = \frac{|\overrightarrow{AN} \cdot m|}{|\overrightarrow{AN}| |m|} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{\frac{5}{2}} \times \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{6}}{5},$$

故直线 AN 与平面 BCD 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

21. 解: (1) 由 $A_1(0, a), A_2(0, -a)$ 可知, $\overrightarrow{PA_1} =$

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, a-1\right), \overrightarrow{PA_2} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -a-1\right),$$

所以 $\overrightarrow{PA_1} \cdot \overrightarrow{PA_2} = \frac{1}{2} + 1 - a^2 = -\frac{1}{2}$, 解得 $a^2 = 2$.

由 $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ 在 C 上可知, $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{2b^2} = 1$, 所以 $b^2 = 1$,

故椭圆 C 的标准方程为 $\frac{y^2}{2} + x^2 = 1$.

(2) 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 易知直线 MN 的斜率不为 0, 设直线 MN 的方程为 $x = my + n$

$$n \left(m + n \neq \frac{\sqrt{2}}{2}, n \neq 0 \right).$$

$$\text{由} \begin{cases} \frac{y^2}{2} + x^2 = 1, \\ x = my + n, \end{cases} \text{整理得} (1 + 2m^2)y^2 + 4mny + 2n^2 - 2 = 0,$$

$$2n^2 - 2 = 0,$$

$$\text{则} \Delta = 16m^2n^2 - 4(1 + 2m^2)(2n^2 - 2) = 16m^2 - 8n^2 + 8 > 0,$$

$$y_1 + y_2 = -\frac{4mn}{1+2m^2}, y_1 y_2 = \frac{2n^2-2}{1+2m^2},$$

由题意可知, $k_{PM} + k_{PN} = 0$,

$$\text{所以 } \frac{y_1-1}{x_1-\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{y_2-1}{x_2-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 0,$$

$$\text{即 } (y_1-1)\left(x_2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + (y_2-1)\left(x_1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0,$$

$$\text{又 } x_1 = my_1 + n, x_2 = my_2 + n, \text{ 所以 } (y_1-1) \cdot \left(my_2 + n - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + (y_2-1)\left(my_1 + n - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0,$$

$$\text{则 } 2my_1 y_2 + \left(n - m - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(y_1 + y_2) - 2n + \sqrt{2} = 0,$$

$$\text{即 } 2m \times \frac{2n^2-2}{1+2m^2} + \left(n - m - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times \left(-\frac{4mn}{1+2m^2}\right) - 2n + \sqrt{2} = 0,$$

$$\text{整理得, } 2\sqrt{2}m^2 - 4m + \sqrt{2} + 2\sqrt{2}mn - 2n = 0,$$

$$\text{即 } (\sqrt{2}m-1)(2m-\sqrt{2}+2n) = 0,$$

$$\text{因为 } m+n \neq \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 所以 } 2m-\sqrt{2}+2n \neq 0, \text{ 所以 } m = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{则直线 } MN \text{ 的方程为 } x = \frac{\sqrt{2}}{2}y + n, y_1 + y_2 =$$

$$-\sqrt{2}n, y_1 y_2 = n^2 - 1, \Delta = 16 - 8n^2 > 0,$$

$$|MN| = \sqrt{1 + \frac{1}{2}} \cdot \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2-n^2},$$

原点到直线 $MN: 2x - \sqrt{2}y - 2n = 0$ 的距离

$$d = \frac{|-2n|}{\sqrt{4+2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}|n|,$$

$$S_{\triangle MON} = \frac{1}{2} |MN| \cdot d = \frac{\sqrt{2}}{2} |n| \sqrt{2-n^2} =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{n^2(2-n^2)} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{(n^2+2-n^2)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

当且仅当 $n^2 = 1$, 即 $n = \pm 1$ 时, $\triangle MON$ 的面

积取得最大值 $\frac{\sqrt{2}}{2}$,

此时直线 MN 的方程为 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}y \pm 1$, 即 $2x - \sqrt{2}y \pm 2 = 0$.

$$22. \text{解: (1) 当 } a = -1 \text{ 时, } f(x) = -xe^x + \frac{1}{2}x^2 -$$

$$\ln x - 2, \text{ 所以 } f(1) = -e + \frac{1}{2} - 2 = -e - \frac{3}{2},$$

$$f'(x) = (-1-x)e^x + x - \frac{1}{x}, \text{ 所以 } f'(1) = -2e,$$

故曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y + e + \frac{3}{2} = -2e(x-1)$,

$$\text{即 } 4ex + 2y + 3 - 2e = 0.$$

(2) 证明: $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$f'(x) = a(x+1)e^x + x - \frac{1}{x} = (x+1)\left(ae^x - \frac{1}{x} + 1\right),$$

设 $\varphi(x) = ae^x - \frac{1}{x} + 1$, 易知 $\varphi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数.

$$\text{又 } \varphi(1) = ae - 2 > 0, \varphi\left(\frac{1}{3}\right) = a\sqrt{e} - 3 + 1 = a\sqrt{e} - 2 < 0,$$

所以存在唯一的 $x_0 \in \left(\frac{1}{3}, 1\right)$, 使得 $\varphi(x_0) =$

$$ae^{x_0} - \frac{1}{x_0} + 1 = 0,$$

$$\text{则 } ax_0 e^{x_0} = 1 - x_0.$$

由函数 $\varphi(x)$ 的单调性易知, 当 $0 < x < x_0$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x_0 < x < 1$ 时, $f'(x) > 0$.

所以 $f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, 1)$ 上单调递增,

$$\text{则在区间 } (0, 1) \text{ 上, } f(x)_{\min} = f(x_0) = ax_0 e^{x_0} + \frac{1}{2}x_0^2 - \ln x_0 - 2 = -x_0 + \frac{1}{2}x_0^2 - \ln x_0 - 1 \left(\frac{1}{3} < x_0 < 1\right),$$

$$\text{令 } h(x) = -x + \frac{1}{2}x^2 - \ln x - 1 \left(\frac{1}{3} < x < 1 \right),$$

$$\text{则 } h'(x) = -1 + x - \frac{1}{x} = \frac{x^2 - x - 1}{x}$$

$$\frac{\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{5}{4}}{x} < 0 \text{ 在 } \left(\frac{1}{3}, 1\right) \text{ 上恒成立,}$$

所以 $h(x)$ 在 $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ 上为减函数,

$$\text{则 } h(x) < h\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3} - \frac{1}{18} - \ln \frac{1}{3} - 1 =$$

$$\ln \frac{3}{e} - \frac{5}{18} < 0.1 - \frac{5}{18} < 0, \text{ 则 } f(x_0) < 0,$$

$$\text{又 } f\left(\frac{1}{e^2}\right) = \frac{ae^{\frac{3}{2}}}{e^2} + \frac{1}{2e^4} > 0,$$

$$f(1) = ae - \frac{3}{2} > 0,$$

$$\text{则 } f\left(\frac{1}{e}\right) \cdot f(x_0) < 0, f(1) \cdot f(x_0) < 0,$$

又因为 $f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, 1)$ 上单调递增,

所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e}, x_0\right)$ 和 $(x_0, 1)$ 上各有一个

零点,

故 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上只有两个零点

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京, 旗下拥有网站(网址: www.zizzs.com)和微信公众平台等媒体矩阵, 用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长, 在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南, 请关注自主选拔在线官方微信号: **zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线