高三数学试卷参考答案(理科)

1. C　因为 $A=\{2,4,6\}$，$B=\{-1,1\}$，所以 $A+B=\{1,3,5,7\}$.

2. D　$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}$.

3. C　因为 $2p=68$，所以 $p=34$，所以抛物线 $y^2=-68x$ 的准线方程为 $x=17$.

4. A　$1-7+7^2-7^3+\cdots+(-7)^{2n}=\dfrac{1-(-7)^{2n}\times(-7)}{1-(-7)}=\dfrac{1-(-7)^{2n+1}}{8}$.

5. C　由 $f(x)=\log_2 x-\log_4(x+20)=0$，得 $\log_4 x^2=\log_4(x+20)(x>0)$，则 $x^2=x+20$，解得 $x=5$ 或 $x=-4$，又 $x>0$，所以 $x=5$.

6. B　设该正四棱柱的底面边长为 a，高为 h，则球 O 的直径为 $\sqrt{a^2+a^2+h^2}=\sqrt{3+3+10}=4$，故球 O 的体积为 $\dfrac{4\pi}{3}\times(\dfrac{4}{2})^3=\dfrac{32\pi}{3}$.

7. A　先排 7 位学员，共有 A_7^7 种排法，再从 8 个空位中选 3 个安排给 3 位摄影师，故不同排法数为 $A_7^7A_8^3$.

8. D　因为 $\tan\theta=\tan(\theta+\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{-\dfrac{5}{3}-1}{1+(-\dfrac{5}{3})}=4$，

所以 $\sqrt{\dfrac{1+2\sin 2\theta+3\cos^2\theta}{1-2\sin 2\theta+3\cos^2\theta}}=\sqrt{\dfrac{\sin^2\theta+4\sin\theta\cos\theta+4\cos^2\theta}{\sin^2\theta-4\sin\theta\cos\theta+4\cos^2\theta}}=|\dfrac{\sin\theta+2\cos\theta}{\sin\theta-2\cos\theta}|=|\dfrac{\tan\theta+2}{\tan\theta-2}|=3$.

9. B　因为 $y'=3x^2+2ax$，所以当 $x=1$ 时，$y'=2a+3$. 若曲线 $y=x^3+ax^2$ 在点 $(1,a+1)$ 处的切线的倾斜角大于 45°，则 $2a+3>1$ 或 $2a+3<0$，解得 $a>-1$ 或 $a<-\dfrac{3}{2}$. 由几何概型可知曲线 $y=x^3+ax^2$ 在点 $(1,a+1)$ 处的切线的倾斜角大于 45° 的概率为 $\dfrac{-\dfrac{3}{2}-(-2)+5-(-1)}{5-(-2)}=\dfrac{13}{14}$.

10. B　因为 $x\in(\pi,\dfrac{19\pi}{18})$，所以 $6x+\dfrac{\pi}{3}+6\varphi\in(6\pi+\dfrac{\pi}{3}+6\varphi,6\pi+\dfrac{2\pi}{3}+6\varphi)$.

因为 $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\dfrac{\pi}{3}+6\varphi\in(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{10\pi}{3})$，$\dfrac{2\pi}{3}+6\varphi\in(\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{11\pi}{3})$，

又 $f(x)$ 在 $(\pi,\dfrac{19\pi}{18})$ 上单调，所以 $\dfrac{\pi}{2}\leqslant\dfrac{\pi}{3}+6\varphi<\dfrac{2\pi}{3}+6\varphi\leqslant\dfrac{3\pi}{2}$ 或 $\dfrac{3\pi}{2}\leqslant\dfrac{\pi}{3}+6\varphi<\dfrac{2\pi}{3}+6\varphi\leqslant\dfrac{5\pi}{2}$ 或 $\dfrac{5\pi}{2}\leqslant\dfrac{\pi}{3}+6\varphi<\dfrac{2\pi}{3}+6\varphi\leqslant\dfrac{7\pi}{2}$，

所以 φ 的取值范围是 $[\dfrac{\pi}{36},\dfrac{5\pi}{36}]\cup[\dfrac{7\pi}{36},\dfrac{11\pi}{36}]\cup[\dfrac{13\pi}{36},\dfrac{17\pi}{36}]$.

11. A　不妨设 $|PQ|=3k$，$|PF_2|=4k(k>0)$，因为 P 在以 F_1F_2 为直径的圆上，所以 $PF_1\perp PF_2$，即 $PQ\perp PF_2$，则 $|QF_2|=5k$. 因为 Q 在 C 的左支上，所以 $|QF_2|+|PF_2|-|PQ|=|QF_2|-|QF_1|+|PF_2|-|PF_1|=6k=4a$，得 $2a=3k$，则 $|PF_1|=|PF_2|-2a=k$. 因为 $PF_1\perp PF_2$，所以 $|F_1F_2|=2c=\sqrt{17}k$，故 $e=\dfrac{2c}{2a}=\dfrac{\sqrt{17}}{3}$.

12. D　$a=\dfrac{27}{10^{\lg 8}}=\dfrac{27}{8}=\dfrac{3^3}{2^3}$. 令 $f(x)=\dfrac{x^3}{2^x}$，则 $f'(x)=\dfrac{x^2(3-x\ln 2)}{2^x}$，$\dfrac{3}{\ln 2}\approx 4.35$.

当 $x<\dfrac{3}{\ln 2}$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,\dfrac{3}{\ln 2})$ 上单调递增，所以 $f(3.1)>f(3)$，即 $b>a$.

因为 $a-c=\dfrac{27}{8}-\dfrac{109}{33}=\dfrac{27\times33-109\times8}{8\times33}=\dfrac{19}{8\times33}>0$，所以 $a>c$.

故 $b>a>c$.

13. 7　$(1+3i)(1+2i^3)=(1+3i)(1-2i)=7+i$.

14. $[-11,11]$　作出约束条件表示的可行域(图略)，当直线 $z=x-2y$ 经过点 $(3,-4)$ 时，z 取得最大值，且最

大值为 11，当直线 $z=x-2y$ 经过点$(-3,4)$时，z 取得最小值，且最小值为-11. 故 $z=x-2y$ 的取值范围为 $[-11,11]$.

15. $\frac{3}{7}$　不妨设 $PA\perp$底面 $ABCD$，则与 PA 垂直的有 4 条，与 PB 垂直的有 2 条，与 PD 垂直的有 2 条，$AB\perp BC$，$AB\perp AD$，$CD\perp BC$，$CD\perp AD$，故所求概率为$\frac{4+2+2+4}{C_8^2}=\frac{3}{7}$.

16. 52　被 3 除余 1 且被 4 除余 2 的正整数按照从小到大的顺序排列，构成首项为 10，公差为 $3\times4=12$ 的等差数列，则 $a_n=10+12(n-1)=12n-2$，$S_n=\frac{(10+12n-2)n}{2}=6n^2+4n$，从而$\frac{S_n+96}{n}=\frac{6n^2+4n+96}{n}=6n+\frac{96}{n}+4\geqslant2\sqrt{6n\cdot\frac{96}{n}}+4=52$，当且仅当 $6n=\frac{96}{n}$，即 $n=4$ 时，等号成立，故$\frac{S_n+96}{n}$的最小值为 52.

17. 解：(1)由正弦定理得 $\sin A\sin^2C+\sin A(1-\cos C)^2=\sin A$，……………………………… 2 分

又由 $0<A<\pi$，可得 $\sin A>0$，所以 $\sin^2C+(1-\cos C)^2=1$，……………………………… 3 分

即 $2-2\cos C=1$，解得 $\cos C=\frac{1}{2}$，……………………………………………………………… 5 分

因为 $0<C<\pi$，所以 $C=\frac{\pi}{3}$. …………………………………………………………………… 6 分

(2)由(1)及余弦定理有 $c^2=a^2+b^2-ab$. ………………………………………………………… 7 分

因为 c 是 a，b 的等比中项，所以 $c^2=ab$，代入上式有 $a^2+b^2-ab=ab$，解得 $a=b$，……………… 9 分

又 $c^2=ab$，所以 $a=b=c$，$3c=6$，可得 $c=2$，……………………………………………… 10 分

故△ABC 外接圆的半径为$\frac{c}{2\sin C}=\frac{2}{2\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. ……………………………………… 12 分

18. 解：(1)因为$(0.025+0.125)\times2=0.3<0.5$，$0.3+0.200\times2=0.7>0.5$，…………………… 2 分

所以该产品这一质量指数的中位数在$[14,16)$内. ………………………………………………… 3 分

设该产品这一质量指数的中位数为 m，则$(m-14)\times0.2+0.3=0.5$，解得 $m=15$. ……………… 5 分

(2)由题意可知抽取的 12 件产品中这一质量指数在$[16,18)$内的有 8 件，这一质量指数在$[18,20]$内的有 4 件. ……………………………………………………………………………………………… 6 分

由题意可知 X 的所有可能取值为 0，1，2，3，4.

$P(X=0)=\frac{C_8^4}{C_{12}^4}=\frac{14}{99}$，$P(X=1)=\frac{C_8^3C_4^1}{C_{12}^4}=\frac{224}{495}$，$P(X=2)=\frac{C_8^2C_4^2}{C_{12}^4}=\frac{56}{165}$，$P(X=3)=\frac{C_8^1C_4^3}{C_{12}^4}=\frac{32}{495}$，$P(X=4)=\frac{C_4^4}{C_{12}^4}=\frac{1}{495}$，……………………………………………………………………………… 10 分

X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{14}{99}$	$\frac{224}{495}$	$\frac{56}{165}$	$\frac{32}{495}$	$\frac{1}{495}$

……………………………………………………………………………………………………… 11 分

$E(X)=0\times\frac{14}{99}+1\times\frac{224}{495}+2\times\frac{56}{165}+3\times\frac{32}{495}+4\times\frac{1}{495}=\frac{4}{3}$. ……………………………… 12 分

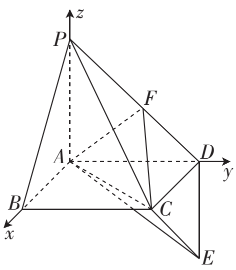
19. (1)证明：因为 $PA\perp$平面 $ABCD$，$DE\perp$平面 $ABCD$，所以 $PA/\!/DE$. ………………………… 1 分

因为底面 $ABCD$ 为矩形，所以 $AB/\!/CD$. ……………………………………………………… 2 分

因为 $CD\cap DE=D$，所以平面 $CDE/\!/$平面 PAB. ……………………………………………… 3 分

又 $CE\subset$平面 CDE，所以 $CE/\!/$平面 PAB. …………………………………………………… 4 分

(2)解:以 A 为坐标原点,$\overrightarrow{AB}$的方向为 x 轴的正方向,建立如图所示的空间直角坐标系,则 $A(0,0,0)$,$C(2,5,0)$,$E(0,5,-3)$. ………………………………… 5 分



因为$\overrightarrow{AF}$在$\overrightarrow{AD}$上的投影为 3,所以 F 的坐标为$(0,3,2)$. ………………………… 6 分

设平面 ACF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,$\overrightarrow{AC}=(2,5,0)$,$\overrightarrow{AF}=(0,3,2)$,

则 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AF}=0$,即$\begin{cases}2x+5y=0,\\3y+2z=0,\end{cases}$ ………………………………………… 7 分

令 $y=2$,得 $\boldsymbol{n}=(-5,2,-3)$. ……………………………………………………… 8 分

设平面 ACE 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x',y',z')$,$\overrightarrow{AC}=(2,5,0)$,$\overrightarrow{AE}=(0,5,-3)$,

则 $\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AE}=0$,即$\begin{cases}2x'+5y'=0,\\5y'-3z'=0,\end{cases}$ ………………………………………………………………… 9 分

令 $y'=6$,得 $\boldsymbol{m}=(-15,6,10)$. ………………………………………………………………………… 10 分

由 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{75+12-30}{\sqrt{361}\times\sqrt{38}}=\dfrac{3\sqrt{38}}{38}$, ……………………………………………………………… 11 分

得平面 ACF 与平面 ACE 所成锐二面角的余弦值为$\dfrac{3\sqrt{38}}{38}$. ……………………………………………… 12 分

20. 解:(1)设 C 的半焦距为 c,由 $|AF|=2-\sqrt{3}$,$|BF|=2+\sqrt{3}$,

可得 $a-c=2-\sqrt{3}$,$a+c=2+\sqrt{3}$,则 $a=2$,$c=\sqrt{3}$, …………………………………………………… 2 分

因为 $b^2=a^2-c^2=1$, ……………………………………………………………………………………… 3 分

所以 C 的方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. ……………………………………………………………………………… 4 分

(2)由题意知,直线 l 的斜率不为 0,

则不妨设直线 l 的方程为 $x=my+t(t\neq 2)$. ………………………………………………………………… 5 分

联立$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2=1,\\x=my+t,\end{cases}$消去 x 得$(m^2+4)y^2+2mty+t^2-4=0$,

$\Delta=4m^2t^2-4(m^2+4)(t^2-4)>0$,化简整理得 $m^2+4>t^2$.

设 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,则 $y_1+y_2=\dfrac{-2mt}{m^2+4}$,$y_1y_2=\dfrac{t^2-4}{m^2+4}$. …………………………………… 7 分

因为 $BM\perp BN$,所以$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BN}=0$.

因为 $B(2,0)$,所以$\overrightarrow{BM}=(x_1-2,y_1)$,$\overrightarrow{BN}=(x_2-2,y_2)$,

得$(x_1-2)(x_2-2)+y_1y_2=0$,

将 $x_1=my_1+t$,$x_2=my_2+t$ 代入上式,

得$(m^2+1)y_1y_2+m(t-2)(y_1+y_2)+(t-2)^2=0$,

得$(m^2+1)\cdot\dfrac{t^2-4}{m^2+4}+m(t-2)\cdot\dfrac{-2mt}{m^2+4}+(t-2)^2=0$,

解得 $t=\dfrac{6}{5}$或 $t=2$(舍去). …………………………………………………………………………… 9 分

所以直线 l 的方程为 $x=my+\dfrac{6}{5}$,则直线 l 恒过点 $Q(\dfrac{6}{5},0)$,

所以 $S_{\triangle BMN}=\dfrac{1}{2}|BQ|\cdot|y_1-y_2|=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{5}\times\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\dfrac{8}{25}\sqrt{\dfrac{25(m^2+4)-36}{(m^2+4)^2}}$.

设 $p=\dfrac{1}{m^2+4}$,则 $0<p\leqslant\dfrac{1}{4}$,$S_{\triangle BMN}=\dfrac{8}{25}\sqrt{-36p^2+25p}$, ………………………………… 10 分

易知 $y=\dfrac{8}{25}\sqrt{-36p^2+25p}$在$(0,\dfrac{1}{4}]$上单调递增,

所以当 $p=\dfrac{1}{4}$时,$S_{\triangle BMN}$取得最大值$\dfrac{16}{25}$. ………………………………………………………… 11 分

又 $S_{\triangle BMN}=\frac{1}{2}|BM|\cdot|BN|$,

所以 $(|BM|\cdot|BN|)_{\max}=2(S_{\triangle BMN})_{\max}=\frac{32}{25}$. …………………………………………………… 12 分

21. 解:(1)由题意可得 $f'(x)=\ln x-x$.

设 $h(x)=\ln x-x$,则 $h'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$. …………………………………………………… 1 分

由 $h'(x)>0$,得 $0<x<1$,由 $h'(x)<0$,得 $x>1$,

则 $h(x)$在$(0,1)$上单调递增,在$(1,+\infty)$上单调递减,即 $f'(x)$在$(0,1)$上单调递增,在$(1,+\infty)$上单调递减,从而 $f'(x)\leqslant f'(1)=-1<0$, …………………………………………………… 3 分

故 $f(x)$的单调递减区间是$(0,+\infty)$,无递增区间. …………………………………………………… 4 分

(2)由题意可得 $g'(x)=x+a-2+\frac{1-a}{x}=\frac{x^2+(a-2)x+1-a}{x}=\frac{(x+a-1)(x-1)}{x}$. ……………… 5 分

①当 $1-a<0$,即 $a>1$ 时,由 $g'(x)>0$,得 $x>1$,由 $g'(x)<0$,得 $0<x<1$,

则 $g(x)$在$(0,1)$上单调递减,在$(1,+\infty)$上单调递增.

因为当 $x\to0$ 时,$g(x)\to+\infty$,当 $x\to+\infty$时,$g(x)\to+\infty$,

所以 $g(x)$要有两个零点,则 $g(1)=\frac{1}{2}+a-2-1<0$,解得 $a<\frac{5}{2}$,故 $1<a<\frac{5}{2}$. ……………………… 7 分

②当 $1-a=0$,即 $a=1$ 时,$g(x)=\frac{1}{2}x^2-x-1=0$,解得 $x=1\pm\sqrt{3}$,

因为 $x>0$,所以 $x=1+\sqrt{3}$,则 $g(x)$有且仅有 1 个零点,故 $a=1$ 不符合题意. ……………………… 8 分

③当 $0<1-a<1$,即 $0<a<1$ 时,由 $g'(x)>0$,得 $0<x<1-a$ 或 $x>1$,由 $g'(x)<0$,得$1-a<x<1$,

则 $g(x)$在$(0,1-a)$和$(1,+\infty)$上单调递增,在$(1-a,1)$上单调递减. …………………………………… 9 分

因为当 $x\to0$ 时,$g(x)<0$,当 $x\to+\infty$时,$g(x)\to+\infty$,

所以 $g(x)$要有两个零点,则 $g(1)=0$ 或 $g(1-a)=0$.

若 $g(1)=\frac{1}{2}+a-2-1=0$,则 $a=\frac{5}{2}$,不符合题意,

若 $g(1-a)=\frac{1}{2}(1-a)^2+(a-2)(1-a)+(1-a)\ln(1-a)-1=0$,

设 $t=1-a\in(0,1)$,则$\frac{1}{2}t^2+t(-t-1)+t\ln t-1=-\frac{1}{2}t^2-t+t\ln t-1=0$.

由(1)可知 $y=t\ln t-\frac{1}{2}t^2-t-1$ 在$(0,1)$上单调递减,则 $t\ln t-\frac{1}{2}t^2-t-1<0$,

即 $g(1-a)=0$ 无解,故 $0<a<1$ 不符合题意. …………………………………………………… 11 分

综上,正数 a 的取值范围是$(1,\frac{5}{2})$. …………………………………………………… 12 分

22. 解:(1)由$\begin{cases}x=t+\frac{1}{t},\\ y=t-\frac{1}{t}\end{cases}$($t$ 为参数),得 $x^2-y^2=4$,

故曲线 C 的普通方程为$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$. …………………………………………………… 2 分

由 $\rho\cos\theta-2\rho\sin\theta+2=0$,得 $x-2y+2=0$,

故直线 l 的直角坐标方程为 $x-2y+2=0$. …………………………………………………… 4 分

(2)由题意可知直线 l 的参数方程为$\begin{cases}x=\frac{2\sqrt{5}}{5}t,\\ y=1+\frac{\sqrt{5}}{5}t\end{cases}$($t$ 为参数). ……………………… 5 分

将直线 l 的参数方程代入曲线 C 的普通方程并整理得 $3t^2-2\sqrt{5}t-25=0$， ………………………… 6 分

设 A,B 对应的参数分别是 t_1,t_2，

则 $t_1+t_2=\frac{2\sqrt{5}}{3}$，$t_1t_2=-\frac{25}{3}$，……………………………………………………………… 7 分

从而 $|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\sqrt{\frac{20}{9}+\frac{100}{3}}=\sqrt{\frac{320}{9}}=\frac{8\sqrt{5}}{3}$， ………………………………… 8 分

故 $\frac{1}{|PA|}+\frac{1}{|PB|}=\frac{|t_1|+|t_2|}{|t_1t_2|}=\frac{|t_1-t_2|}{|t_1t_2|}=\frac{8\sqrt{5}}{25}$. ………………………………………………… 10 分

23. 解：(1)当 $a=2$ 时，$f(x)=|x+1|+|x-2|$.

当 $x<-1$ 时，$f(x)>2x$ 可化为 $-(x+1)-(x-2)>2x$，得 $x<\frac{1}{4}$； ………………………………… 1 分

当 $-1\leqslant x\leqslant 2$ 时，$f(x)>2x$ 可化为 $(x+1)-(x-2)>2x$，得 $x<\frac{3}{2}$； ……………………………… 2 分

当 $x>2$ 时，$f(x)>2x$ 可化为 $(x+1)+(x-2)>2x$，得 $-1>0$，不成立. …………………………… 3 分

综上，不等式 $f(x)>2x$ 的解集为 $\{x|x<\frac{3}{2}\}$. ……………………………………………………… 5 分

(2)因为 $f(x)\leqslant 2$ 的解集包含 $[-1,a^2+\frac{2}{9}]$，所以当 $-1\leqslant x\leqslant a^2+\frac{2}{9}$ 时，$f(x)\leqslant 2$ 恒成立. ……… 6 分

当 $-1\leqslant x\leqslant a^2+\frac{2}{9}$ 时，$f(x)\leqslant 2$ 可化为 $x+1+|x-a|\leqslant 2$，即 $|x-a|\leqslant 1-x$， ………………… 7 分

即 $x-1\leqslant x-a\leqslant 1-x$，则 $2x-1\leqslant a\leqslant 1$，……………………………………………………………… 8 分

当 $-1\leqslant x\leqslant a^2+\frac{2}{9}$ 时，$-3\leqslant 2x-1\leqslant 2a^2-\frac{5}{9}$，则 $a\geqslant 2a^2-\frac{5}{9}$，解得 $-\frac{1}{3}\leqslant a\leqslant\frac{5}{6}$.

综上，a 的取值范围为 $[-\frac{1}{3},\frac{5}{6}]$. …………………………………………………………………… 10 分