

大理、丽江 2023 届高中毕业生第二次复习统一检测

数学参考答案及评分标准

一、单选题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	D	B	B	A	D	C	A

【解析】

1. 【解析】因为集合 $A = \{x | x^2 - 5x - 6 \leq 0\} = [-1, 6]$ 且 $\complement_{\mathbb{R}} B = (-\infty, 4)$ ，所以 $A \cap (\complement_{\mathbb{R}} B) = [-1, 4)$ 。

故选 C。

2. 【解析】复数 $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 的共轭复数 $\bar{z} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

复数 $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 的模 $|z| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$ ，则 $\bar{z} + |z| = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + 1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 。

故选 D。

3. 【解析】因为平面向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 60° ， $\vec{a} = (2, 0)$ ， $|\vec{b}| = 1$ ，

所以 $|\vec{a}| = 2$ ， $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ = 2 \times 1 \times \frac{1}{2} = 1$ ，

所以 $|\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} + 2\vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{b}^2} = \sqrt{2^2 + 4 \times 1 + 4 \times 1^2} = 2\sqrt{3}$ 。故选 B。

4. 【解析】大鼠从第一天起打进尺数依次为：1，2，4，8，…，

小鼠从第一天起打进尺数依次为：1， $\frac{1}{2}$ ， $\frac{1}{4}$ ， $\frac{1}{8}$ ，…，

前 3 天两鼠完成量的总和为 $\frac{35}{4} < 16$ ，前 4 天两鼠完成量的总和为 $\frac{135}{8} > 16$ ，

所以第 4 天两鼠相逢。故选：B。

5. 【解析】由祖暅原理可知，该不规则几何体的体积与正六棱台的体积相等，

$\therefore$ 正六棱台的上下底面边长分别为 1 和 2，则 $S_1 = 6 \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ，

$S_2 = 6 \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ ，

$\therefore V = \frac{1}{3} (S_1 + \sqrt{S_1 \cdot S_2} + S_2) \cdot h = \frac{1}{3} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{6\sqrt{3}}{2} + 6\sqrt{3} \right) \cdot 2\sqrt{3} = 21$ 。故选：A。

数学参考答案及评分标准 · 第 1 页（共 12 页）

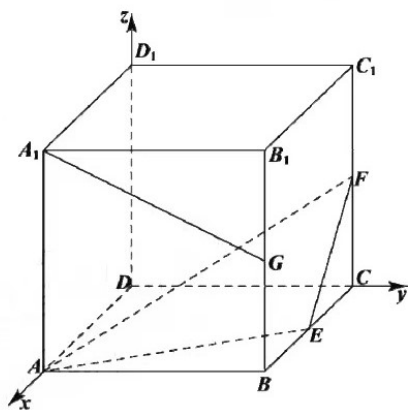
对于 A 选项, $\overrightarrow{AB_1} = (0, 2, 2)$, $\overrightarrow{A_1C} = (-2, 2, -2)$, $\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{A_1C} = 4 - 4 = 0$, 故 A 选项

正确;

对于 B 选项, $\overrightarrow{A_1B} = (0, 2, -2)$, $\overrightarrow{AD_1} = (-2, 0, 2)$,

$$\cos \langle \overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{AD_1} \rangle = \frac{\overrightarrow{A_1B} \cdot \overrightarrow{AD_1}}{|\overrightarrow{A_1B}| \cdot |\overrightarrow{AD_1}|} = \frac{-4}{2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2},$$

所以, 向量 $\overrightarrow{A_1B}$ 与向量 $\overrightarrow{AD_1}$ 的夹角是 120° , A_1B 与 AD_1 所成角为 60° , 故 B 选项正确.



对于 C 选项, $\overrightarrow{DD_1} = (0, 0, 2)$, $\overrightarrow{AF} = (-2, 2, 1)$, 则 $\overrightarrow{DD_1} \cdot \overrightarrow{AF} = 2 \neq 0$, 故 C 选项错误;

对于 D 选项, 设平面 AEF 的法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$, $\overrightarrow{AE} = (-1, 2, 0)$, $\overrightarrow{EF} = (-1, 0, 1)$,

$$\text{由 } \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{AE} = -x + 2y = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{EF} = -x + z = 0 \end{cases}, \text{ 可得 } \begin{cases} y = \frac{x}{2} \\ z = x \end{cases}, \text{ 取 } x = 2, \text{ 可得 } \vec{m} = (2, 1, 2), \overrightarrow{A_1G} = (0, 2, -1),$$

$\therefore \vec{m} \cdot \overrightarrow{A_1G} = 2 - 2 = 0$, $\therefore \vec{m} \perp \overrightarrow{A_1G}$, $\therefore A_1G \perp$ 平面 AEF , $\therefore A_1G \parallel$ 平面 AEF , 故 D

选项正确;

故选: ABD.

6. 【解析】 $\because MA \parallel x$ 轴, $\therefore A\left(\frac{1}{4}, 1\right)$, 由题意可知 AB 经过抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点 $F(1, 0)$,

$\therefore$ 直线 AB 的方程为 $y = -\frac{4}{3}(x-1)$. 联立方程组 $\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = -\frac{4}{3}(x-1) \end{cases}$, 解得 $B(4, -4)$,

$\therefore |AM| = 3 - \frac{1}{4} = \frac{11}{4}$, $|AB| = \frac{1}{4} + 4 + 2 = \frac{25}{4}$, $|MB| = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$.

$\therefore \triangle ABM$ 的周长为 $9 + \sqrt{26}$. 故选: D.

7. 【解析】设 $f(x) = \ln x - x$, 则 $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$,

当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) > 0$, 则函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增,

当 $x > 1$ 时, $f'(x) < 0$, 则函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $f(x)_{\max} = f(1) = -1 < 0$, 所以 $\ln x < x$, 所以 $a = \ln c < c$,

又 $\ln(\ln b) = \ln c$, 所以 $\ln b = c < b$, 所以 $b > c > a$. 故选: C.

8. 【解析】设函数 $f(x)$ 的最小正周期为 T ,

因为 $x = -\frac{\pi}{8}$ 是函数 $f(x)$ 的一个零点, $x = \frac{\pi}{8}$ 是函数 $f(x)$ 的一条对称轴,

则 $\frac{2n+1}{4}T = \frac{\pi}{8} - \left(-\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\pi}{4}$, 其中 $n \in \mathbb{N}$, 所以, $T = \frac{\pi}{2n+1} = \frac{2\pi}{\omega}$, $\therefore \omega = 4n+2$,

因为函数 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{4}\right)$ 上单调, 则 $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{5} \leq \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}$, 所以, $\omega \leq 20$.

所以, ω 的可能取值有: 2、6、10、14、18.

(i) 当 $\omega = 18$ 时, $f(x) = \sin(18x + \varphi)$, $f\left(-\frac{\pi}{8}\right) = \sin\left(-\frac{9\pi}{4} + \varphi\right) = 0$,

所以, $\varphi - \frac{9\pi}{4} = k\pi (k \in \mathbb{Z})$, 则 $\varphi = k\pi + \frac{9\pi}{4} (k \in \mathbb{Z})$,

$\therefore -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, $\therefore \varphi = \frac{\pi}{4}$, 所以, $f(x) = \sin\left(18x + \frac{\pi}{4}\right)$,

当 $\frac{\pi}{5} < x < \frac{\pi}{4}$ 时, $\frac{77\pi}{20} < 18x + \frac{\pi}{4} < \frac{19\pi}{4}$, 所以, 函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{4}\right)$ 上不单调, 不合乎

题意;

(ii) 当 $\omega=14$ 时, $f(x)=\sin(14x+\varphi)$, $f\left(-\frac{\pi}{8}\right)=\sin\left(-\frac{7\pi}{4}+\varphi\right)=0$,

所以, $\varphi-\frac{7\pi}{4}=k\pi(k\in\mathbb{Z})$, 则 $\varphi=k\pi+\frac{7\pi}{4}(k\in\mathbb{Z})$,

$\because -\frac{\pi}{2}\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}$, $\therefore\varphi=-\frac{\pi}{4}$, 所以, $f(x)=\sin\left(14x-\frac{\pi}{4}\right)$,

当 $\frac{\pi}{5}<x<\frac{\pi}{4}$ 时, $\frac{51\pi}{20}<14x-\frac{\pi}{4}<\frac{13\pi}{4}$, 所以, 函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{5},\frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递减, 合乎

题意. 因此, ω 的最大值为 14. 故选: A.

二、多选题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项是符合题目要求的. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分)

题号	9	10	11	12
答案	AC	ABD	ACD	BCD

【解析】

9. 【解析】因为展开式的通项公式为 $T_{r+1}=C_7^r\left(\frac{2}{x}\right)^{7-r}(-x)^r=2^{7-r}\cdot(-1)^r\cdot C_7^r\cdot x^{2r-7}$,

由 $2r-7=0$, 得 $r=\frac{7}{2}$ (舍去), 所以展开式不存在常数项, 故 A 正确;

二项式系数和为 $2^7=128$, 故 B 错误;

展开式共有 8 项, 所以第 4 项和第 5 项二项式系数最大, 故 C 正确;

令 $x=1$, 得所有项的系数和为 $(2-1)^7=1$, 故 D 错误. 故选: AC.

10. 【解析】以点 D 为坐标原点, DA 、 DC 、 DD_1 所在直线分别为 x 、 y 、 z 轴建立如下

图所示的空间直角坐标系, 设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, 则 $A(2,0,0)$ 、

$B(2,2,0)$ 、 $C(0,2,0)$ 、 $D(0,0,0)$ 、 $E(1,2,0)$ 、 $F(0,2,1)$ 、 $G(2,2,1)$ 、 $A_1(2,0,2)$ 、

$B_1(2,2,2)$ 、 $C_1(0,2,2)$ 、 $D_1(0,0,2)$.

11. 【解析】设点 $P(x, y)$ ，由已知得 $\frac{y}{x+\sqrt{3}} \cdot \frac{y}{x-\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$ ，整理得 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ ，

所以点 P 的轨迹为曲线 E 的方程为 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1 (x \neq \pm\sqrt{3})$ ，故 A 正确；

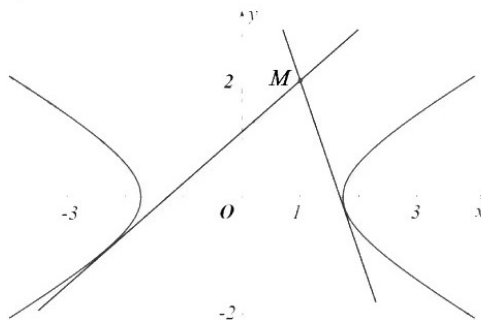
又离心率 $e = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ，故 B 不正确；

圆 $(x-2)^2 + y^2 = 1$ 的圆心 $(2, 0)$ 到曲线 E 的渐近线 $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 的距离为

$$d = \frac{2}{\sqrt{1^2 + (\pm\sqrt{3})^2}} = 1,$$

又圆 $(x-2)^2 + y^2 = 1$ 的半径为 1，故 C 正确；

如图：切线仅有 2 条



故 D 正确。故选：ACD

12. 【解析】对于 A，对于任意的 $x, y \in R$ 恒有 $f(x+y) + f(x-y) = f(x)f(y)$ ，

令 $y = x = 0$ 可得： $f(0) + f(0) = f^2(0)$ ，又由 $f(0) \neq 0$ ，则 $f(0) = 2$ ，A 不正确；

对于 B，对于任意的 $x, y \in R$ 恒有 $f(x+y) + f(x-y) = f(x)f(y)$ ，

令 $x = y = \frac{t}{2}$ ，则有 $f(\frac{t}{2} + \frac{t}{2}) + f(0) = f^2(\frac{t}{2})$ ，即 $f(t) + f(0) = f^2(\frac{t}{2})$ ，则有 $f^2(\frac{t}{2}) = 2$ ，

B 正确；

对于 C，对于任意的 $x, y \in R$ 恒有 $f(x+y) + f(x-y) = f(x)f(y)$ ，

令 $x=0$ ，则有 $f(y)+f(-y)=f(0)f(y)=2f(y)$ ，变形可得 $f(y)=f(-y)$ ，则 $f(x)$ 为偶函数，C 正确；

对于 D，对于任意的 $x, y \in R$ 恒有 $f(x+y)+f(x-y)=f(x)f(y)$ ，

令 $x=m+t, y=t$ 可得： $f(m+2t)+f(m)=f(m+t)f(t)=0$ ，

变形可得 $f(m+2t)=-f(m)$ ，

则有 $f(m+4t)=-f(m+2t)=f(m)$ ，即 $f(x)$ 是周期为 $4t$ 的周期函数，D 正确，

故选：BCD.

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

题号	13	14	15	16
答案	$\frac{17}{2}$ （或 8.5）	$(x+1)^2+(y-1)^2=1$	$(4, +\infty)$	(1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ (2) $(6, 8]$

13. 【解析】由题意， $80\% \times 10 = 8$ ，则这组数据的第 80 百分位数是 $\frac{1}{2}(8+9)=8.5$ ，故答案为：8.5

14. 【解析】设圆心 $C(0,0)$ 关于直线 l 的对称点为 $C'(a,b)$ ，

$$\text{所以有 } \begin{cases} \frac{a+0}{2} - \frac{b+0}{2} + 1 = 0 \\ \frac{b}{a} = -1 \end{cases}, \text{ 解得 } a = -1, b = 1, \text{ 所以对称圆的圆心为 } C'(-1,1),$$

又圆 C 的半径为 1，所以圆 C 关于直线 l 对称的圆的方程为 $(x+1)^2+(y-1)^2=1$ 。

故答案为： $(x+1)^2+(y-1)^2=1$ 。

15. 【解析】设切点坐标为： (x_0, y_0) ， $y' = (x+1-a)e^x$ ，

所以切线斜率为 $k = (x_0+1-a)e^{x_0}$ ，

所以切线方程为 $y - (x_0 - a)e^{x_0} = (x_0+1-a)e^{x_0}(x - x_0)$ ，

又切线过坐标原点，所以 $0 - (x_0 - a)e^{x_0} = (x_0+1-a)e^{x_0}(0 - x_0)$ ，

整理得 $x_0^2 - ax_0 + a = 0$ ，

又曲线有两条过坐标原点的切线，所以该方程有两个实数解，

所以 $\Delta = a^2 - 4a > 0$ ，解得 $a \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$ ，又因为 $a > 0$ ，所以 $a \in (4, +\infty)$ 。

故答案为： $(4, +\infty)$ 。

16. 【解析】圆弧的半径为 a , $OF=c=1$, $\angle B_1FB_2=120^\circ$, 所以可得圆弧的半径为 $B_1F=2OF=2$, 即 $a=2$, 所以 $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$,

所以曲圆的方程为: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1(x \geq 0)$, $(x-1)^2+y^2=4(x < 0)$, 则半椭圆方程为

$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1(x \geq 0)$, $A_1(-1,0)$, 所以 A_1 其实是椭圆的另一个焦点, 设 $\angle PFA_2=\theta$, ΔA_1PQ 的周长为 L ,

① 当 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ 时, Q 在圆上, P 在椭圆上,

$$L=|A_1Q|+|FQ|+|FP|+|A_1P|=2a+r+2r\sin\frac{\theta}{2}=6+4\sin\frac{\theta}{2} \in (6,8);$$

② 当 $\theta \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$ 时, P 、 Q 都在椭圆上, $L=|A_1Q|+|FQ|+|FP|+|A_1P|=2a+2a=8$;

③ 当 $\theta \in \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$ 时, P 在圆上, Q 在椭圆上,

$$L=|A_1Q|+|FQ|+|FP|+|A_1P|=2a+r+2r\sin\frac{\pi-\theta}{2}=6+4\cos\frac{\theta}{2} \in (6,8);$$

$$\text{所以 } \Delta A_1PQ \text{ 的周长 } L = \begin{cases} 6+4\sin\frac{\theta}{2}, & \theta \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right) \\ 8, & \theta \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right] \\ 6+4\cos\frac{\theta}{2}, & \theta \in \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right) \end{cases}$$

所以 ΔA_1PQ 的周长范围为: $(6,8]$. 故答案为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$; $(6,8]$.

四、解答题 (共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤)

17. 【解析】

(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q ,

$$\text{由 } \begin{cases} 4+d=2 \cdot 2q-1 \\ 4+2d=2 \cdot q^2+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=4q-5 \\ d=q^2-1 \end{cases}, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\therefore q=2, d=3,$$

$$\therefore a_n=3n+1, b_n=2^n. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(2) 当 $\{c_n\}$ 的前 60 项中含有 $\{b_n\}$ 的前 6 项时, 令 $3n+1 < 2^7=128 \Rightarrow n < \frac{127}{3}$,

此时至多有 $41+7=48$ 项 (不符).

当 $\{c_n\}$ 的前 60 项中含有 $\{b_n\}$ 的前 7 项时, 令 $3n+1 < 2^8=256 \Rightarrow n < 85$,

且 $2^2, 2^4, 2^6$ 是 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的公共项.7 分

则 $\{c_n\}$ 的前 60 项中含有 $\{b_n\}$ 的前 7 项且含有 $\{a_n\}$ 的前 56 项, 再减去公共的三项.

$$\therefore S_{60} = \left(56 \times 4 + \frac{56 \times 55}{2} \times 3 \right) + 2 + 2^3 + 2^5 + 2^7 = 4844 + 170 = 5014 \dots\dots 10 \text{ 分}$$

18. 【解析】

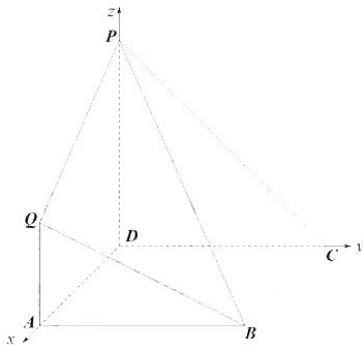
(1) 证明: 四边形 $ABCD$ 是正方形, 可得 $AB \parallel CD$, 又 $AB \not\subset$ 平面 DCP , $CD \subset$ 平面 DCP , 则有 $AB \parallel$ 平面 DCP ,3 分

四边形 $ADPQ$ 是梯形, 且 $QA \parallel PD$,

又 $QA \not\subset$ 平面 DCP , $PD \subset$ 平面 DCP , 则有 $QA \parallel$ 平面 DCP ,

又 $QA \cap AB = A$, $QA, AB \subset$ 平面 QAB , 故平面 $QAB \parallel$ 平面 PDC6 分

(2) 依题意知 DA, DC, DP 两两垂直, 故以 D 为原点, DA, DC, DP 所在的直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系.



则 $C(0,2,0)$, $P(0,0,2)$, $B(2,2,0)$, $Q(2,0,1)$,

可得: $\overrightarrow{PB} = (2,2,-2)$, $\overrightarrow{PC} = (0,2,-2)$, $\overrightarrow{PQ} = (2,0,-1)$, 设平面 PBC 的一个法向量 $\vec{n} = (x,y,z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{PB} = 2x + 2y - 2z = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{PC} = 2y - 2z = 0 \end{cases}, \text{取 } y=1, \text{ 可得 } \vec{n} = (0,1,1), \dots\dots 8 \text{ 分}$$

设平面 PBQ 的一个法向量 $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{PB} = 2x_1 + 2y_1 - 2z_1 = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{PQ} = 2x_1 - z_1 = 0 \end{cases}, \text{取 } x_1=1, \text{ 可得 } \vec{m} = (1,1,2), \dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } |\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

所以平面 QBP 与平面 BPC 夹角的大小为 30°12 分

19. 【解析】

(1) 选 ① $2a - b = 2c \cos B$, 由余弦定理得 $2a - b = 2c \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{a}$3 分

整理得 $a^2 + b^2 - c^2 = ab$, 所以 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1}{2}$, 又 $C \in (0, \pi)$, 故 $C = \frac{\pi}{3}$6 分

选 ② $S = \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + b^2 - c^2)$, 因为 $S = \frac{1}{2}ab \sin C$, $a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cos C$3 分

故 $\frac{1}{2}ab \sin C = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2ab \cos C$, 可得 $\tan C = \sqrt{3}$, 又 $C \in (0, \pi)$, 故 $C = \frac{\pi}{3}$6 分

选 ③ $\sqrt{3} \sin(A+B) = 1 + 2 \sin^2 \frac{C}{2}$, 可得 $\sqrt{3} \sin C = 2 - \cos C \Rightarrow \sqrt{3} \sin C + \cos C = 2$,

.....3 分

所以 $\sin\left(C + \frac{\pi}{6}\right) = 1$, 又 $C \in (0, \pi)$, 所以 $C + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, 故 $C = \frac{\pi}{3}$6 分

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 因为 CD 是 $\angle ACB$ 的平分线, 且 $b = 4$, 设 $CD = x$, 所以

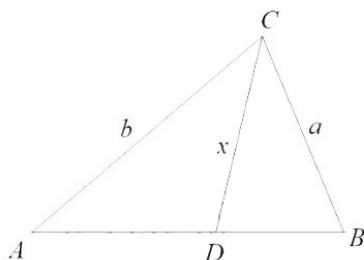
$$S_{\triangle ACB} = S_{\triangle ACD} + S_{\triangle BCD} \Rightarrow \frac{1}{2}ab \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}bx \sin \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}ax \sin \frac{\pi}{6}$$

即 $4\sqrt{3}a = 4x + ax$ 8 分

$$\Rightarrow x = \frac{4\sqrt{3}a}{a+4},$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} = S_{\triangle CDB} = \frac{1}{2}ax \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow \sqrt{3}ax = 8$$
10 分

联立以上两式得: $3a^2 - 2a - 8 = 0$, 又 $a > 0$, 解得 $a = 2$12 分



数学参考答案及评分标准 · 第 9 页 (共 12 页)

20. 【解析】

(1) 零假设为 H_0 : 对党史知识的了解情况与性别无关.

根据列联表中的数据, 经计算得到

$$\chi^2 = \frac{200 \times (30 \times 80 - 20 \times 70)^2}{50 \times 150 \times 100 \times 100} \approx 2.667 < 7.879 = \chi_{0.005}^2 \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

根据小概率值 $\alpha = 0.005$ 的独立性检验, 没有充分的理由说明 H_0 不成立, 则不能认

为对党史知识的了解情况与性别有关. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2) 设事件 A 为“第二支部从乙箱中抽出的第 1 个题是选择题”,

事件 B_1 为“第一支部从甲箱中取出 2 个题都是选择题”,

事件 B_2 为“第一支部从甲箱中取出 1 个选择题 1 个填空题”,

事件 B_3 为“第一支部从甲箱中取出 2 个题都是填空题”,

则 B_1, B_2, B_3 彼此互斥, 且 $B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \Omega$,

$$P(B_1) = \frac{C_5^2}{C_8^2} = \frac{5}{14}, \quad P(B_2) = \frac{C_5^1 C_3^1}{C_8^2} = \frac{15}{28}, \quad P(B_3) = \frac{C_3^2}{C_8^2} = \frac{3}{28}, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$P(A|B_1) = \frac{6}{9}, \quad P(A|B_2) = \frac{5}{9}, \quad P(A|B_3) = \frac{4}{9},$$

$$P(A) = P(B_1) \times P(A|B_1) + P(B_2) \times P(A|B_2) + P(B_3) \times P(A|B_3)$$

$$= \frac{5}{14} \times \frac{6}{9} + \frac{15}{28} \times \frac{5}{9} + \frac{3}{28} \times \frac{4}{9} = \frac{7}{12} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

所求概率即是 A 发生的条件下 B_1 发生的概率:

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1 A)}{P(A)} = \frac{P(B_1) P(A|B_1)}{P(A)} = \frac{\frac{5}{14} \times \frac{6}{9}}{\frac{7}{12}} = \frac{20}{49}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

21. 【解析】

$$(1) \text{ 由题意知, } \begin{cases} e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{a^2} + \frac{9}{4b^2} = 1 \\ a^2 - b^2 = c^2 \end{cases} \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

解得 $a^2 = 4, b^2 = 3$,

椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2) (i) 显然直线 l 斜率不为 0, 设直线 l 方程为 $x = my + 1$, 与 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 联立得:

$$(3m^2 + 4)y^2 + 6my - 9 = 0, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{设 } P、Q \text{ 点坐标为 } (x_1, y_1), (x_2, y_2), \text{ 则 } y_1 + y_2 = \frac{-6m}{3m^2 + 4}, y_1 y_2 = \frac{-9}{3m^2 + 4}, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{直线 } AP \text{ 的方程为 } y = \frac{y_1}{x_1 + 2}(x + 2), \text{ 令 } x = 4, \text{ 得 } y_M = \frac{6y_1}{x_1 + 2},$$

$$\text{同理 } y_N = \frac{6y_2}{x_2 + 2}, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} y_M y_N &= \frac{36y_1 y_2}{(x_1 + 2)(x_2 + 2)} = \frac{36y_1 y_2}{(my_1 + 3)(my_2 + 3)} = \frac{36y_1 y_2}{m^2 y_1 y_2 + 3m(y_1 + y_2) + 9} \\ &= \frac{36 \frac{-9}{3m^2 + 4}}{m^2 \frac{-9}{3m^2 + 4} + 3m \frac{-6m}{3m^2 + 4} + 9} = -9. \dots\dots\dots 10 \text{ 分} \end{aligned}$$

$$(ii) S_{\triangle AMN} = \frac{1}{2} \times 6 \times |y_M - y_N| = 3 \left| y_M + \frac{9}{y_M} \right| \geq 3 \times 2 \sqrt{y_M \cdot \frac{9}{y_M}} = 18.$$

当且仅当 $y_M = 3, y_N = -3$ 或 $y_M = -3, y_N = 3$ 时等号成立. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

22. 【解析】

$$(1) f'(x) = \cos x - \frac{a+1-x}{e^x}, \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

所以切线的斜率 $k = f'(0) = -a$, 由题意 $k \times 1 = -a \times 1 = -1$, 解得 $a = 1$. $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

$$\text{所以 } f(x) = \sin x - \frac{x-1}{e^x},$$

$$\text{所以 } f(0) = \sin 0 - \frac{0-1}{e^0} = 1,$$

所以切线 l 的方程为 $y - 1 = -1(x - 0)$, 即 $x + y - 1 = 0$. $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

(2) 由 (1) 知 $a=1$, 所以 $f(x)=\sin x-\frac{x-1}{e^x}$,

由 $f(x)=\sin x-\frac{x-1}{e^x}=0$, 可得 $e^x \cdot \sin x - x + 1 = 0$,

令 $g(x)=e^x \cdot \sin x - x + 1$, $x \in (0, \pi)$,

所以 $g'(x)=(\sin x + \cos x)e^x - 1$,6 分

① 当 $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$ 时, $\sin x + \cos x \geq 1$, $e^x > 1$,

所以 $g'(x) > 0$,

所以 $g(x)$ 在 $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递增,

又因为 $g(0)=1 > 0$,

所以 $g(x)$ 在 $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$ 上无零点,8 分

② 当 $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ 时, 令 $h(x)=(\sin x + \cos x)e^x - 1$,

所以 $h'(x)=2 \cos x \cdot e^x < 0$, 即 $h(x)$ 在 $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上单调递减,

又因为 $h(\frac{\pi}{2})=e^{\frac{\pi}{2}} - 1 > 0$, $h(\pi)=-e^{\pi} - 1 < 0$,

所以存在 $x_0 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 使得 $h(x_0)=0$,10 分

所以 $g(x)$ 在 $x \in (\frac{\pi}{2}, x_0)$ 上单调递增, 在 $x \in (x_0, \pi)$ 上单调递减,

因为 $g(x_0) > g(\frac{\pi}{2})=e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2} + 1 > 0$, $g(\pi)=-\pi + 1 < 0$,

所以 $g(x)$ 在 $x \in (x_0, \pi)$ 上且只有一个零点,

综上所述: $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上有且只有一个零点.12 分

附: 其它解法酌情给分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线